

---

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

CENTRO UNIVERSITARIO DE LOS VALLES

---

DIVISIÓN DE ESTUDIOS CIENTÍFICOS Y TECNOLÓGICOS  
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS



**“PERTURBACIONES GRAVITACIONALES  
GENERADAS POR OBJETOS MASIVOS EN EL  
FORMALISMO DE NEWMAN-PENROSE”**

---

TESIS QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS FÍSICO-MATEMATICAS  
PRESENTA: VÍCTOR HUGO GUALAJARA ESTRADA  
DIRECTORA: DRA. CLAUDIA MORENO GONZÁLEZ

---

DICIEMBRE 2015





# UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

CENTRO UNIVERSITARIO DE LOS VALLES

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

COORDINACIÓN DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

**Mtro. Francisco Maldonado Virgen**  
**Coordinador Control Escolar**  
**CUVALLES**

**At'n Dr. Víctor Manuel Castillo Girón**

**PRESENTE**

Por este conducto me permito hacer de su conocimiento que el trabajo de tesis presentado por el **Mtro. Víctor Hugo Gualajara Estrada** con código 086325101, para optar por el grado de Doctor en Ciencias Físico Matemáticas con el tema titulado

“Perturbaciones Gravitacionales Generadas por Objetos Masivos en el Formalismo de Newman-Penrose”,

Sí **CUMPLE** con los requerimientos exigidos por la Junta Académica para su presentación en examen de grado.

Por tal motivo, le informo que el examen de grado se efectuará el día 11 de Diciembre de 2015 a las 10:30 hrs en la sala de gobierno. Al respecto, le solicito atentamente la elaboración del acta correspondiente. Asimismo, le comunico sobre la designación del comité de examen de grado.

**PRESIDENTE** Dra. Claudia Moreno González  
**SECRETARIO** Dr. Juan Carlos Degollado Daza  
**VOCAL** Dr. Vladimir Efremov  
**VOCAL** Dr. Alfonso Manuel Hernández Magdaleno  
**VOCAL** Dr. Darío Núñez Zúñiga

Sin otro particular aprovecho la oportunidad para reiterarle mi atenta y distinguida consideración.

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA  
C. U. VALLES



26 NOV 2015

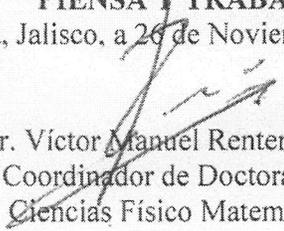
Secretaría Académica

Fecha Jared Hora 1:49

ATENTAMENTE

“PIENSA Y TRABAJA”

Ameca, Jalisco, a 26 de Noviembre de 2015

  
Dr. Víctor Manuel Rentería Tapia  
Coordinador de Doctorado en  
Ciencias Físico Matemáticas



UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA  
C. UNIVERSITARIO  
DE LOS VALLES  
Coordinación de Doctorado  
en Ciencias Físico Matemáticas

# Agradecimientos

*A mi padre.*

*A mis hermanos: Antonio, Norma, Alma, Francisco y Arturo.*

*A mi directora de tesis, la Dra. Claudia Moreno González; por su gran apoyo y aún mayor paciencia.*

*Al Dr. Darío Nuñez Zuñiga y Dr. Juan Carlos Degollado Daza por su tiempo para brindarme asesoría y consejos.*

*A mi amigo el Mtro. Itzcóatl Tonatiuh Bravo Padilla, por quien en algunos momentos difíciles de combinar trabajo y estudio fue posible salir adelante.*

*A la Universidad de Guadalajara, y en especial al Centro Universitario de los Valles (CUVALLES) por su apoyo otorgado durante la realización de los estudios de su programa de Doctorado.*

# Dedicatoria

*A mi madre.*



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Dedicatoria</b>	<b>II</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Fundamentos Matemáticos</b>	<b>4</b>
1.1. Relatividad General . . . . .	4
1.2. Formalismo tetradial . . . . .	7
1.2.1. Representación tetradial . . . . .	7
1.2.2. Derivadas direccionales y coeficientes de rotación de spin . . . . .	8
1.2.3. Las identidades de Ricci y de Bianchi . . . . .	10
1.3. El Formalismo de Newman-Penrose . . . . .	10
1.3.1. La base nula y los coeficientes de spín . . . . .	11
1.3.2. La representación del Tensor de Weyl, Ricci y Riemann . . . . .	13
1.3.3. Las identidades de Ricci . . . . .	15
1.3.4. Las identidades de Bianchi . . . . .	16
1.3.5. La clasificación de Petrov . . . . .	17
1.3.6. Las ecuaciones de Maxwell en el formalismo de Newman-Penrose . . . . .	20
1.3.7. Clasificación del tensor de campo electromagnético . . . . .	21
1.3.8. Teorema de Peeling . . . . .	22
<b>2. Perturbaciones gravitacionales y electromagnéticas en el formalismo de Newman-Penrose</b>	<b>23</b>
2.1. Ecuación de Teukolsky con fuentes en el formalismo de Newman-Penrose . . . . .	23
2.2. Ecuación de la radiación gravitacional . . . . .	26
2.3. Ecuación de la radiación electromagnética . . . . .	29

<b>3. Análisis comparativo de una señal gravitacional a partir de su compañera electromagnética</b>	<b>31</b>
3.1. Fundamentos: Formalismo Newman-Penrose . . . . .	31
3.2. Señales gravitacionales . . . . .	32
3.2.1. Perturbaciones gravitacionales . . . . .	32
3.2.2. Perturbaciones gravitacionales en fondo de Schwarzschild . . . . .	33
3.2.3. Fuente de la perturbación gravitacional . . . . .	35
3.2.4. Teorema de Peeling para ondas gravitacionales . . . . .	37
3.3. Señal electromagnética . . . . .	37
3.3.1. Ecuaciones de Maxwell . . . . .	37
3.3.2. Ecuaciones de Maxwell en fondo de Schwarzschild . . . . .	38
3.3.3. Fuente de la perturbación electromagnética . . . . .	39
3.3.4. Teorema de Peeling para ondas electromagnéticas . . . . .	40
3.4. Resultados numéricos . . . . .	40
3.4.1. Forma de onda . . . . .	41
3.4.2. Energía Radiada . . . . .	44
<b>4. Conclusiones</b>	<b>46</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>48</b>

# Introducción

La teoría de la Relatividad General [1] formulada por Albert Einstein en 1915 [2], cumplirá 100 años de su formulación en noviembre de este año. Esta teoría formula que la gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo debida a cuerpos muy masivos, estos cuerpos se atraen unos a otros porque deforman la geometría del espacio-tiempo. La teoría es puramente geométrica, donde las distancias involucradas son muy grandes y distorsionadas (curvadas) por los efectos de la gravedad. En 1916 Einstein haciendo uso de teoría de perturbaciones, linealizó sus ecuaciones obteniendo con ello la formulación analítica para la búsqueda de las ondas gravitacionales [3]. Durante este centenario se han realizado diferentes pruebas científicas para que pase de ser una teoría a una ley, donde se compruebe la existencia de las ondas gravitacionales que son generadas por oscilaciones de objetos masivos y cuya partícula mediadora es llamada "gravitón", y debe propagarse a la velocidad de la luz. Las ondas gravitacionales son una predicción de la teoría de la Relatividad General que todavía no han sido comprobadas directamente de forma experimental debido a que son ondas de frecuencia muy pequeña. La prueba indirecta de la existencia de ondas gravitacionales fue realizada por los astrónomos Joseph Taylor y Russel Hulse, al analizar el decremento de la energía de un sistema binario, esta pérdida de energía fue comprobada con la teoría de Einstein. Esta investigación les dio el Premio Nobel de Física [4] en 1993. Algunas fuentes de ondas gravitacionales son: oscilaciones pequeñas de objetos compactos, radiación por objetos en órbita alrededor de un hoyo negro, movimientos lentos en campos gravitacionales débiles, colisiones entre agujeros negros y estrellas de neutrones, rotación rápida de objetos no esféricos, etc..

La búsqueda experimental de las ondas gravitacionales fue iniciada por Joseph Weber en 1965, cuando terminó la construcción de un detector cilíndrico de aluminio. Intentos posteriores perfeccionaron el experimento tipo barra detectora de Weber sin éxito de detección de ondas gravitacionales. En la actualidad, los detectores más modernos son tipo interferométricos basados en el interferómetro de Michelson, algunos de este son eLISA (EUA), LIGO (EUA) y VIRGO (Italia-Francia) entre otros [5]-[9]. Además de la búsqueda de ondas gravitacionales por interferometría láser, se están realizando investigaciones en la creación de plantillas de información que simulen los frentes de onda generados por diferentes objetos astrofísicos. Para obtener un frente de onda gravitacional

es necesario hacer uso de relatividad numérica [10], donde se realizan evoluciones temporales de los campos gravitacionales en la vecindad de hoyos negros o estrellas de neutrones. Con lo anterior se tendrá una base de datos numérica que pueda ser comparada con los datos experimentales, y corroborar la existencia de ondas gravitacionales.

Los objetos más masivos que pueden generar ondas gravitacionales de mayor intensidad son los hoyos negros, un mecanismo de generación de estas ondas puede ser haciendo uso de teoría de perturbaciones. Un hoyo negro puede ser perturbado de diferentes maneras, por ejemplo, por una partícula cayendo dentro de un hoyo negro o por el disco de acreción de materia que lo rodea. Por medio de perturbaciones, podemos describir y entender la evolución de los campos en el exterior de los hoyos negros, analizar las ondas salientes y entrantes que nos de información de la generación, propagación e iteración de ondas en el espacio-tiempo de un hoyo negro, así como también el análisis de estabilidad del sistema.

Como caso particular en la búsqueda de ondas gravitacionales, se ha sugerido que se estudien señales que pueden acompañar a la onda gravitacional. En particular hay fenómenos astrofísicos que producen ondas gravitacionales y ondas electromagnéticas. En este trabajo nos interesa el efecto que tiene un disco de acreción alrededor de un agujero negro en la señal gravitacional y electromagnética. La compañera electromagnética de una señal gravitacional es un tema recurrente en astrofísica, por ejemplo, en [11] se describe la dinámica de un agujero negro interactuando con un campo magnético, y en [12] se plantean las bases para simular numéricamente la colisión de dos agujeros negros cargados. En ambos casos la radiación electromagnética se produce por el cambio temporal de campos eléctricos y magnéticos. En [13] se encontró numéricamente que existe una escala de proporcionalidad entre la señal gravitacional y la electromagnética en una colisión. Las ondas gravitacionales con más probabilidad a ser observadas son las que se generan de dos objetos compactos y por lo tanto es natural pensar en la interacción electromagnética de los dos cuerpos. En este trabajo, sin embargo, nos centramos en los discos de acreción alrededor de un agujero negro, y analizaremos la radiación gravitacional generada por partículas cargadas cayendo hacia el centro de un hoyo negro. Aunque la amplitud de las ondas es mucho menor, es posible inferir las propiedades generales a partir de una sistema simple como el que se propone en [14]. Haremos uso del formalismo de Newman-Penrose [15] debido a que estamos considerando partículas cargadas en su disco de acreción, lo que pudiera generar un sistema de ecuaciones acoplados entre los campos electromagnéticos y gravitacionales. Esta formulación ha sido trabajada por Teukolsky [16]-[17] pero sin considerar fuentes en el espacio-tiempo. El formalismo de Newman-Penrose permite obtener una ecuación para las ondas entrantes y salientes, y en el caso particular de este trabajo solo se analizarán las ondas salientes generadas por las partículas de carga alrededor del hoyo negro.

Para el desarrollo de este trabajo realizaremos los siguientes dos pasos: primero se derivan

las ecuaciones linealizadas de las ecuaciones de Einstein con fuentes para el caso de ondas salientes, obteniendo la ecuación de Teukolsky incluyendo fuentes; y segundo la solución de esta ecuación diferencial que nos permita el estudio y análisis de la generación de radiación electromagnética y gravitatoria en las proximidades de un agujero negro de Schwarzschild perturbado. Generaremos un escenario que nos permitirá hacer una comparación entre las señales gravitacionales y electromagnéticas que son generadas por una fuente común generada por el disco de acreción de partículas cargadas.

Una revisión de los fundamentos matemáticos básicos de tres áreas importantes como lo son la relatividad general, el formalismo tetradial y el formalismo de Newman-Penrose, se realiza en el capítulo 1. En este capítulo describimos el tensor métrico, el tensor de Riemann, el tensor de Ricci o el escalar de Curvatura. En el capítulo 2 abordaremos el tema de las ecuaciones de perturbación gravitacional. Apoyados en los trabajos de Chandrasekhar y Teukolsky derivaremos las ecuaciones de Teukolsky con fuentes en el formalismo de Newman-Penrose. En el capítulo 3 nos ocuparemos de un estudio comparativo entre las señales gravitacionales y electromagnéticas, en este espacio estudiamos la radiación electromagnética y gravitacional en las proximidades de un agujero negro estático utilizando la teoría de perturbaciones. Resolvemos numéricamente las ecuaciones de Einstein perturbadas alrededor de un espacio tiempo de fondo de un agujero negro considerando que la fuente de la perturbación es materia cargada que cae radialmente hacia el agujero. Es importante el poder deducir algunas propiedades para el caso gravitacional a partir del caso electromagnético. Finalmente, en el capítulo 4 comentaremos las conclusiones importantes que se dieron durante el análisis de resultados. Los trabajos relevantes que arrojaron conclusiones son la derivación de las ecuaciones de Teukolsky con fuentes en el formalismo de Newman-Penrose, y por otro lado el estudio comparativo entre las señales gravitacional y electromagnética que se realiza en el capítulo 3, lo destacado de como a partir de información de propiedades de la señal electromagnética se puede hacer el estudio de propiedades de las ondas gravitacionales.

# Capítulo 1

## Fundamentos Matemáticos

En este capítulo se pretende realizar el estudio de tres áreas básicas para este trabajo: primera la Relatividad General, segunda el formalismo tetradial y tercera el formalismo de Newman-Penrose. Es muy conocido que las ondas gravitacionales son parte importante de las soluciones de las ecuaciones de Einstein y con estas soluciones se podrán explicar aspectos astrofísicos del universo, esto implícito en la Relatividad General. La primer herramienta matemática que se uso para los temas de relatividad fueron los tensores, una manera alternativa de analizar estos temas es mediante el formalismo tetradial, en este formalismo se elige una base linealmente independiente de cuatro vectores o tétrada proyectando las cantidades relevantes sobre la base y eligiendo las ecuaciones de campo que se satisfacen. Apoyados en la idea tetradial estudiaremos el formalismo de Newman-Penrose, esto surge de la idea de Penrose de que el elemento esencial del espacio-tiempo es la estructura del cono de luz, esto ayuda a que se reduzca el número de las Ecuaciones de Einstein.

### 1.1. Relatividad General

La teoría de la Relatividad General es un modelo en donde la gravedad se manifiesta como la curvatura del espacio-tiempo. El espacio-tiempo  $(M, g)$  esta definido como una variedad Riemanniana analítica 4-dimensional  $M$  dotada con una métrica Lorentziana  $g$ . Una revisión detallada de estos conceptos pueden encontrarse en libros estándar sobre Relatividad General [18]-[20]. En el contexto de la Relatividad General la geometría del espacio-tiempo se define a través de una métrica, que en teorías de gravitación se representa por un tensor simétrico de segundo orden, cuyas componentes covariantes en un sistema de coordenadas  $x^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) se denotan por  $g_{\mu\nu}$ . El cuadrado de la distancia entre dos puntos en el espacio-tiempo es dado por el elemento diferencial de longitud

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.1)$$

Bajo una transformación general de coordenadas  $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\nu$ , las nuevas componentes de la métrica se obtienen usando la expresión

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\rho\sigma}. \quad (1.2)$$

Es posible definir una derivada covariante asociada a esta métrica, que denotaremos por  $\nabla_\mu$ , y cuya acción sobre su tensor mixto de segundo orden está dada por

$$\nabla_\lambda T_\nu^\mu = \partial_\lambda T_\nu^\mu + \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu T_\nu^\sigma - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma T_\sigma^\mu, \quad (1.3)$$

siendo las funciones  $\Gamma_{\nu\alpha}^\mu$  las conexiones afines definidas en  $(M, g)$  [21]. Sin embargo, puede probarse que si una variedad  $M$  posee una métrica  $g$ , entonces existe una única conexión simétrica  $\Gamma_{\lambda\sigma}^\mu$  llamada conexión de Christoffel o Símbolos de Christoffel, definidos por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}), \quad (1.4)$$

donde la notación  $g^{\mu\nu}$  corresponde a las componentes contravariantes del tensor métrico  $g$ , y satisfacen  $g_{\mu\sigma} g^{\sigma\nu} = \delta_\mu^\nu$ . Es conveniente aclarar que los símbolos de Christoffel no son tensores, pues no se transforman como tales.

La curvatura del espacio-tiempo es determinada por el tensor de Riemann, cuyas componentes pueden expresarse en términos de los símbolos de Christoffel como

$$R_{\lambda\mu\nu}^\sigma = \partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma - \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \Gamma_{\sigma\mu}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho, \quad (1.5)$$

con  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ . A partir de una contracción del tensor de Riemann se construye el tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ , cuyas componentes covariantes se definen por

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\sigma\nu}^\sigma. \quad (1.6)$$

La traza del tensor de Ricci define a la curvatura escalar  $R$ , dada por

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.7)$$

Las ecuaciones de campo de Einstein relacionan la geometría del espacio-tiempo con la materia contenida en el mismo. La geometría aparece en las ecuaciones de Einstein a través de  $R_{\mu\nu}$  y  $R$ , construidos a partir del tensor métrico. Estos últimos se incluyen en el tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  dado por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (1.8)$$

que por construcción satisface que  $\nabla_\mu G_\nu^\mu = 0$ .

Existe una manera alternativa de obtener las ecuaciones de campo de Einstein, mediante el uso del principio variacional comúnmente denominado principio de mínima acción. Considerando una métrica con signatura  $(+, -, -, -)$ , la correspondiente acción está dada por

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda + L_{mat}), \quad (1.9)$$

donde  $L_{mat}$  es una densidad lagrangiana asociada a materia y  $g$  es el determinante de la métrica. El parámetro  $\Lambda$  es conocido como la constante cosmológica y es utilizado para analizar modelos de la expansión del universo. Puede verse fácilmente que con ayuda de la siguiente definición

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L_{mat})}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (1.10)$$

la variación de la acción (1.9) con respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$  nos da las ecuaciones de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (1.11)$$

Debe notarse que la constante cosmológica puede interpretarse como un tensor energía momento  $T_{\mu\nu} = -(8\pi G)^{-1} \Lambda g_{\mu\nu}$ , el cual se asocia a una ecuación de estado de vacío. La materia entra en las ecuaciones de Einstein a través del tensor de energía momento denotado por  $T_{\mu\nu}$ , y las componentes espacio-espacio al tensor de esfuerzo.

El sistema de ecuaciones ec. (1.11) tiene más incógnitas que ecuaciones, por lo que necesitamos una ecuación para completar el sistema, la derivada covariante del tensor de energía momento debe completar un sistema consistente

$$\nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = 0. \quad (1.12)$$

Esta relación es interpretada como una generalización, en el contexto de un espacio-tiempo curvo, de las leyes de conservación usuales para la energía y el momento.

En Relatividad General podríamos pensar en una geodésica como una generalización del concepto euclidiano de línea recta. En un espacio euclidiano una línea recta es la trayectoria que nos da la distancia más corta entre cualquiera dos puntos. Cabe mencionar que en general sobre una variedad con una conexión arbitraria  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ , el proceso de transporte paralelo aplicado sobre una curva no necesariamente genera vectores tangentes a la misma.

Consideremos una variedad como en Relatividad General dotada de una conexión afín de Christoffel. Sean  $U^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\sigma}$  las componentes contravariantes de un vector tangente a la curva  $x^{\mu}(\sigma)$ , donde  $\sigma$  es un parámetro que caracteriza la curva. La condición de que  $U^{\mu}$  sea transportado paralelamente a lo largo de la curva es

$$\frac{dU^{\mu}}{d\sigma} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} U^{\alpha} U^{\beta} = f(\sigma) U^{\mu}, \quad (1.13)$$

donde  $f(\sigma)$  es una función arbitraria. La ecuación (1.13) puede escribirse de manera más simple utilizando un parámetro afín. Eligiendo un parámetro afín  $\lambda$ , la expresión (1.13) se convierte en

$$\frac{dU^{\mu}}{d\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} U^{\alpha} U^{\beta} = 0. \quad (1.14)$$

Esta relación se llama la Ecuación de las geodésicas, y puede verse que para el caso de un espacio euclidiano, corresponde a la línea recta  $\frac{d^2 x^{\mu}}{d\lambda^2} = 0$ .

En la teoría de la Relatividad General la mayor utilidad de la ecuación de las geodésicas es la

determinación de trayectorias sobre el espacio-tiempo asociadas a partículas sobre las cuales no actúa ninguna otra fuerza más que la gravitacional. De hecho la ecuación (1.14) puede pensarse como la generalización de la segunda ley de Newton para el caso de fuerza nula.

No obstante, es posible introducir otras fuerzas agregando los términos apropiados del lado derecho de (1.14), como es el caso de una partícula con masa  $m$  y carga eléctrica  $q$  en Relatividad Especial, cuya ecuación de movimiento es

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = \frac{q}{m} F_\nu^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (1.15)$$

donde  $F_\nu^\mu$  es el tensor mixto de Maxwell.

La ecuación de geodésicas se aplica tanto a partículas masivas como no masivas. En el caso de partículas masivas usualmente se toma como parámetro  $\lambda$  el tiempo propio  $\tau$ , de tal manera, que el correspondiente vector tangente  $U^\mu$  es normalizado a través de la expresión  $g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 1$  si la signatura de la métrica es  $(+, -, -, -)$  y  $g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -1$  si la signatura es opuesta.

## 1.2. Formalismo tetradial

La teoría de la Relatividad General es descrita mediante el uso de tensores, y consiste en considerar las ecuaciones de campo de Einstein en una base local de coordenadas adaptadas al problema a considerar. En este trabajo se maneja, el formalismo tetradial, en este formalismo se elige una base de cuatro vectores ó tétrada, linealmente independientes, proyectando las cantidades físicas sobre la base que se elige y considerando las ecuaciones de campo que éstas satisfacen.

Es importante señalar que en las aplicaciones del formalismo tetradial, la elección de la tétrada siempre depende de las simétrías del espacio-tiempo que se desea analizar. Ahora nos dedicaremos a desarrollar el formalismo tetradial [15], [22], [23], para las ecuaciones de la Relatividad General.

### 1.2.1. Representación tetradial

En el presente formalismo para cada punto del espacio-tiempo podemos asociar una base de cuatro vectores contravariantes que se puede expresar de la siguiente forma

$$e_{(a)}^i \quad (a = 1, 2, 3, 4; \quad i = 0, 1, 2, 3), \quad (1.16)$$

donde podemos apreciar, una etiqueta a la base y otro a las componentes. Empleando el vector contravariante (1.16), el vector covariante se expresa de la siguiente forma

$$e_{(a)i} = g_{ik} e_{(a)}^k, \quad (1.17)$$

donde  $g_{ik}$  denota el tensor métrico. Definiendo la inversa  $e_i^{(b)}$  de la matriz  $e_{(a)}^i$ , (el índice tetradial representa las filas y el índice tensorial representa las columnas), tenemos

$$e_{(a)}^i e_i^{(b)} = \delta_a^b; \quad e_{(a)}^i e_j^{(a)} = \delta_j^i, \quad (1.18)$$

en este aspecto la convección de la suma de Einstein con respecto a los índices se supone independiente. Además, empleando las definiciones anteriores, se encuentra la matriz constante simétrica

$$e_{(a)}^i e_{(b)i} = \eta_{(a)(b)} = cte. \quad (1.19)$$

Es muy común suponer que los vectores base  $e_{(a)}^i$  son ortonormales, debido a ello  $\eta_{(a)(b)}$  representa una matriz diagonal con elementos  $\eta_{(a)(b)} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ . Sea  $\eta^{(a)(b)}$  la inversa de la matriz  $\eta_{(a)(b)}$  entonces

$$\eta^{(a)(b)} \eta_{(b)(c)} = \delta_{(c)}^{(a)}. \quad (1.20)$$

Por lo tanto debido a estas definiciones tendremos

$$\eta_{(a)(b)} e_i^{(a)} = e_{(b)i}, \quad \eta^{(a)(b)} e_{(a)i} = e_i^{(b)}, \quad (1.21)$$

donde se obtiene la siguiente relación

$$e_{(a)i} e_j^{(a)} = g_{ij}. \quad (1.22)$$

Dado cualquier campo vectorial, que se proyecta sobre la tétrada se obtienen las componentes tetradiales de la siguiente forma

$$\begin{aligned} A_{(a)} &= e_{(a)j} A^j = e_{(a)}^j A_j, \\ A^{(a)} &= \eta^{(a)(b)} A_b = e_j^{(a)} A^j = e^{(a)j} A_j, \\ A^i &= e_{(a)}^i A^{(a)} = e^{(a)i} A_{(a)}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

y de forma tensorial se tiene

$$\begin{aligned} T_{(a)(b)} &= e_{(a)}^i e_{(b)}^j T_{ij} = e_{(a)}^i T_{i(b)}, \\ T_{ij} &= e_i^a e_j^b T_{(a)(b)} = e_i^{(a)} T_{(a)j}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

### 1.2.2. Derivadas direccionales y coeficientes de rotación de spin

Tomaremos el vector contravariante  $e_{(a)}$  considerado como un vector tangente, como una herramienta para definir la derivada direccional

$$e_a = e_{(a)}^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (1.25)$$

que se puede expresar de la siguiente forma

$$\phi_{,(a)} = e_{(a)}^i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = e_{(a)}^i \phi_{,i}, \quad (1.26)$$

donde  $\phi$  es un campo escalar cualquiera. La derivada direccional de  $A_a$  en la dirección  $e_b$  se define de la siguiente manera

$$A_{(a),(b)} = e_a^j A_{j,i} e_{(b)}^i + \gamma_{(c)(a)(b)} A^c. \quad (1.27)$$

Tenemos para este caso que las cantidades  $\gamma_{(c)(a)(b)}$  son llamadas coeficientes de rotación de Ricci,

$$\gamma_{(c)(a)(b)} = e_{(c)}^k e_{(a)k,i} e_{(b)}^i. \quad (1.28)$$

Estos coeficientes de rotación son antisimétricos en su primer par de índices

$$\gamma_{(c)(a)(b)} = -\gamma_{(a)(c)(b)}, \quad (1.29)$$

además, podemos expresar la ecuación (1.27) de la siguiente forma

$$e_{(a)}^i A_{i;j} e_{(b)}^j = A_{(a),(b)} - \eta^{(n)(m)} \gamma_{(n)(a)(b)} A_{(m)}, \quad (1.30)$$

Comúnmente el lado derecho de la ecuación (1.30) es llamada la derivada intrínseca de  $A_{(a)}$  en la dirección de  $e_{(b)}$  y se puede expresar por

$$A_{(a)|(b)} = e_{(a)}^i A_{i;j} e_{(b)}^j \quad \text{o} \quad A_{i;j} = e_i^{(a)} A_{(a)|(b)} e_j^{(b)}. \quad (1.31)$$

Existe una relación entre la derivada direccional y la derivada intrínseca y la cual puede ser expresada como

$$A_{(a)|(b)} = A_{(a),(b)} - \eta^{(n)(m)} \gamma_{(n)(a)(b)} A_{(m)}. \quad (1.32)$$

Sabemos que la derivada intrínseca de un vector puede ser utilizada para expresar tensores, por lo cual la derivada intrínseca del tensor de Riemann la podemos expresar como

$$R_{(a)(b)(c)(d)|(f)} = R_{ijkl;m} e_{(a)}^i e_{(b)}^j e_{(c)}^k e_{(d)}^l e_{(f)}^m, \quad (1.33)$$

expandiendo la expresión tendremos

$$R_{(a)(b)(c)(d),(f)} = [R_{ijkl} e_{(a)}^i e_{(b)}^j e_{(c)}^k e_{(d)}^l]_{,m} e_{(f)}^m. \quad (1.34)$$

Cabe señalar que para la evaluación de los coeficientes de rotación no es necesario la evaluación de la derivadas covariantes. Por definición tendremos

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = e_{(b)i,j}^k [e_{(a)}^i e_{(c)}^j - e_{(a)}^j e_{(c)}^i] = [e_{(b)i,j} - e_{(b)j,i}] e_{(a)}^i e_{(c)}^j, \quad (1.35)$$

podemos reemplazar en esta última ecuación las derivadas ordinarias de  $e_{(b)i}$  y  $e_{(b)j}$  por las derivadas covariantes, y obtener

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = [e_{(b)i;j} - e_{(b)j;i}] e_{(a)}^i e_{(c)}^j = \gamma_{(a)(b)(c)} - \gamma_{(c)(b)(a)}. \quad (1.36)$$

De la última ecuación de puede obtener la siguiente expresión

$$\gamma_{(a)(b)(c)} = \frac{1}{2} [\lambda_{(a)(b)(c)} + \lambda_{(c)(b)(a)} - \lambda_{(b)(c)(a)}]. \quad (1.37)$$

### 1.2.3. Las identidades de Ricci y de Bianchi

Podemos proyectar la identidad de Ricci y obtener la siguiente expresión

$$e_{(a)i;k;l} - e_{(a)i;l;k} = R_{mikl}e_{(a)}^m, \quad (1.38)$$

en términos de tétradas podemos expresar la identidad de Ricci de la siguiente forma

$$\begin{aligned} R_{(a)(b)(c)(d)} &= R_{mikl}e_{(a)}^m e_{(b)}^i e_{(c)}^k e_{(d)}^l \\ &= \{-[\gamma_{(a)(f)(g)}e_i^{(f)}e_k^{(g)}] + [\gamma_{(a)(f)(g)}e_i^f e_l^{(g)}]_{;k}\} e_{(b)}^i e_c^{(k)} e_{(d)}^l, \end{aligned} \quad (1.39)$$

donde  $R_{mikl}$  es el tensor de Riemann. Podemos reemplazar las derivadas covariantes por los coeficientes de rotación respectivos en la ecuación (1.39), de lo cual se obtendrá

$$\begin{aligned} R_{(a)(b)(c)(d)} &= -\gamma_{(a)(b)(c),(d)} + \gamma_{(a)(b)(d),(c)} + \gamma_{(b)(a)(f)}[\gamma_{(c)(d)}^{(f)} - \gamma_{(d)(c)}^{(f)}] \\ &\quad + \gamma_{(f)(a)(c)}\gamma_{(b)(d)}^{(f)} - \gamma_{(f)(a)(d)}\gamma_{(b)(c)}^{(f)}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Por la antisimetría de los coeficientes de rotación (1.29) en sus dos primeros índices y debido a la antisimetría que se presenta en los componentes tetradiales de la definición el tensor de Riemann, existirán 36 ecuaciones distintas de cero. Ahora tendremos que las identidades de Bianchi, expresadas en términos de las derivadas intrínsecas y de los componentes tetradiales tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} R_{(a)(b)[(c)(d)](f)} &= \frac{1}{6} \sum_{[(c)(d)(f)]} \{R_{(a)(b)(c),(f)} - \eta^{(n)(m)}[\gamma_{(n)(a)(f)}R_{(m)(b)(c)(d)} \\ &\quad + \gamma_{(n)(b)(f)}R_{(a)(m)(c)(d)} + \gamma_{(n)(c)(f)}R_{(a)(b)(m)(d)} + \gamma_{(n)(d)(f)}R_{(a)(b)(c)(m)}]\}, \end{aligned} \quad (1.41)$$

y se obtendrán 20 ecuaciones linealmente independientes de este tipo. Se puede identificar  $R_{mikl}$  en la ecuación (1.33) con el tensor de Riemann, por lo cual la identidad de Bianchi toma la forma

$$R_{ij[kl;m]} = 0 \quad (1.42)$$

donde los corchetes indican antisimetría sobre los índices encerrados

## 1.3. El Formalismo de Newman-Penrose

El Formalismo de Newman-Penrose se caracteriza porque se elige una base de vectores nulos  $l, n, m$  y  $\bar{m}$ , de los cuales  $l$  y  $n$  son reales,  $m$  y  $\bar{m}$  son complejos conjugados entre ellos. La principal motivación para la elección de una base nula se origina de que el elemento esencial del espacio-tiempo es la estructura del cono de luz, el cual hace posible la introducción de una base espinorial.

### 1.3.1. La base nula y los coeficientes de spín

La base nula antes mencionada, satisface las siguientes condiciones de ortogonalidad,

$$l \cdot m = l \cdot \bar{m} = n \cdot m = n \cdot \bar{m} = 0, \quad (1.43)$$

y dado que los vectores  $l, m$  y  $n$  son nulos, se cumplen las siguientes condiciones

$$l \cdot l = n \cdot n = m \cdot m = \bar{m} \cdot \bar{m} = 0. \quad (1.44)$$

Además, cumplen las siguientes condiciones de normalización

$$l \cdot n = 1 \quad \text{y} \quad m \cdot \bar{m} = -1. \quad (1.45)$$

La base nula, puede ser obtenida a partir de una base ortonormal  $(e_t, e_x, e_y, e_z)$ , donde  $e_t$  es temporaloide y  $e_x, e_y, e_z$  son espacialoides, tal que

$$\begin{aligned} e_1 &= l = \frac{e_t + e_z}{\sqrt{2}}, & e_2 &= n = \frac{e_t - e_z}{\sqrt{2}}, \\ e_3 &= m = \frac{e_x + ie_y}{\sqrt{2}}, & e_4 &= \bar{m} = \frac{e_x - ie_z}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

La matriz fundamental representada por  $\eta_{(a)(b)}$  es una matriz constante simétrica de la forma

$$e_{(a)}^i e_{(b)i} = \eta_{(a)(b)} = \eta^{(a)(b)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (1.47)$$

La correspondiente base covariante esta dada por las siguiente expresión

$$e^1 = e_2 = n, \quad e^2 = e_1 = l, \quad e^3 = -e_4 = -\bar{m}, \quad \text{y} \quad e^4 = -e_3 = -m. \quad (1.48)$$

Los vectores base considerados como derivadas direccionales, son representados por símbolos especiales

$$e^1 = e_2 = \Delta, \quad e^2 = e_1 = D, \quad -e^3 = e_4 = \bar{\delta} \quad \text{y} \quad -e^4 = e_3 = \delta. \quad (1.49)$$

El tensor métrico expresado en términos de la tétrada se escribe de la forma

$$g_{ij} = l_i n_j + n_i l_j - m_i \bar{m}_j - \bar{m}_i m_j. \quad (1.50)$$

Los coeficientes de rotación de Ricci expresados en términos de los coeficientes de rotación, llamados también coeficientes espín, son expresados de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \kappa &= \gamma_{311}, & \rho &= \gamma_{314}, & \epsilon &= \frac{1}{2}(\gamma_{211} + \gamma_{341}), \\ \sigma &= \gamma_{313}, & \mu &= \gamma_{243}, & \gamma &= \frac{1}{2}(\gamma_{212} + \gamma_{342}), \\ \lambda &= \gamma_{244}, & \tau &= \gamma_{321}, & \alpha &= \frac{1}{2}(\gamma_{214} + \gamma_{344}), \\ \nu &= \gamma_{242}, & \pi &= \gamma_{241}, & \beta &= \frac{1}{2}(\gamma_{213} + \gamma_{343}). \end{aligned} \quad (1.51)$$

Es necesario obtener 24 coeficientes de rotación  $\gamma_{(a)(b)(c)}$  de la ecuación (1.51) se obtienen únicamente 12 coeficientes, pero tomando su complejo conjugado podemos obtener los 24 coeficientes. De manera explícita, los coeficientes de rotación de Ricci, en términos de las derivadas direccionales, en la ecuación (1.51) están dados por

$$\begin{aligned}
\kappa &= \bar{m}^i l_{i;j} l^j = -l^i m_{i;j} l^j, \\
\sigma &= m^i l_{i;j} m^j = -l^i m_{i;j} m^j, \\
\rho &= m^i l_{i;j} \bar{m}^j = -l^i m_{i;j} \bar{m}^j, \\
\tau &= m^i l_{i;j} n^j = -l^i m_{i;j} n^j, \\
\epsilon &= \frac{1}{2}(n^i l_{i;j} l^j + m^i \bar{m}_{i;j} l^j), \\
\beta &= \frac{1}{2}(n^i l_{i;j} m_j + m^j + m^i \bar{m}_{i;j} m^j), \\
\alpha &= \frac{1}{2}(n^i l_{i;j} \bar{m}^j + m^i \bar{m}_{i;j} \bar{m}^j), \\
\gamma &= \frac{1}{2}(n^i l_{i;j} n^j + m^i \bar{m}_{i;j} n^j), \\
\pi &= n^i \bar{m}_{i;j} l^j = -\bar{m}^i n_{i;j} l^j, \\
\mu &= n^i \bar{m}_{i;j} m^j = \bar{m}^i n_{i;j} m^j, \\
\lambda &= n^i \bar{m}_{i;j} \bar{m}^j = -\bar{m}^i n_{i;j} \bar{m}^j, \\
\nu &= n^i \bar{m}_{i;j} n^j = -\bar{m}^i n_{i;j} n^j.
\end{aligned} \tag{1.52}$$

Dado que la derivada covariante cumple la regla de Liebniz, las derivadas de los vectores de la tétrada en las direcciones de los vectores, se pueden expresar en términos de los coeficientes espín de la forma

$$\begin{aligned}
m^i l_{i;j} &= l_i n^k l_{k;j} m^j + n_i l^k l_{k;j} m^j - m_i \bar{m}^k l_{k;j} m^j - \bar{m}_i m^k l_{k;j} m^j, \\
&= (\beta + \bar{\alpha}) l_i - \bar{\pi} m_i - \sigma \bar{m}_i,
\end{aligned} \tag{1.53}$$

y finalmente, expresando las derivadas direccionales faltantes tendremos

$$\begin{aligned}
l^j l_{i;j} &= (\epsilon + \bar{\epsilon})l_i - \bar{\kappa}m_i - \kappa\bar{m}_i = l^j D, \\
n^j l_{i;j} &= (\gamma + \bar{\gamma})l_i - \bar{\tau}m_i - \tau\bar{m}_i = n^j D, \\
m^j l_{i;j} &= (\beta + \bar{\alpha})l_i - \bar{\rho}m_i - \sigma\bar{m}_i = m^j D, \\
l^j n_{i;j} &= -(\epsilon + \bar{\epsilon})n_i - \pi m_i - \bar{\pi}\bar{m}_i = l^j \Delta, \\
n^j n_{i;j} &= -(\gamma + \bar{\gamma})n_i + \nu m_i + \bar{\nu}\bar{m}_i = n^j \Delta, \\
m^j n_{i;j} &= -(\beta + \bar{\alpha})n_i - \mu m_i + \lambda\bar{m}_i = m^j \Delta, \\
l^j m_{i;j} &= (\epsilon - \bar{\epsilon})m_i - \kappa n_i + \pi l_i = l^j \delta, \\
n^j m_{i;j} &= (\gamma + \bar{\gamma})m_i - \tau n_i + \bar{\nu}l_i = n^j \delta, \\
m^j m_{i;j} &= (\beta - \bar{\alpha})m_i - \sigma n_i + \bar{\lambda}l_i = m^j \delta, \\
\bar{m}^j m_{i;j} &= ((\alpha - \bar{\beta}))m_i - \rho n_i + \bar{\mu}l_i = \bar{m}^j \delta.
\end{aligned} \tag{1.54}$$

### 1.3.2. La representación del Tensor de Weyl, Ricci y Riemann

El tensor de curvatura tiene la característica de que puede ser expresado en términos del tensor de Weyl o de curvatura conforme  $C_{abcd}$ , con la propiedad de que sus trazas sean iguales a cero, de la forma

$$R_{abcd} = C_{abcd} - \frac{1}{2}(\eta_{ac}R_{bd} - \eta_{bc}R_{ad} - \eta_{ad}R_{bc} + \eta_{bd}R_{ac}) + \frac{1}{6}(\eta_{ac}\eta_{bd} - \eta_{ad}\eta_{bc})R, \tag{1.55}$$

donde  $R_{bd}$  denota los componentes tetradiales del tensor de Ricci y  $R$  es el escalar de curvatura, tal que

$$R_{ac} = \eta^{bd}R_{abcd} \quad \text{y} \quad R = \eta^{ab}R_{ab} = 2(R_{12} - R_{34}) \tag{1.56}$$

El hecho de que  $C_{abcd}$  tenga todas sus trazas iguales a cero, requiere que

$$\eta^{ad}C_{abcd} = C_{1bc2} + C_{2bc1} - C_{3bc4} - C_{4bc3} = 0, \tag{1.57}$$

y a la vez requerimos que se cumpla

$$C_{1234} + C_{1342} + C_{1423} = 0, \tag{1.58}$$

la condición (1.57), tomando  $b = c$  obtendremos

$$C_{1314} = C_{2324} = C_{1332} = C_{1442} = 0, \tag{1.59}$$

usando la condición  $b \neq c$  y con la ecuación (1.58) tenemos

$$\begin{aligned}
C_{1231} &= C_{1334}, & C_{1241} &= C_{1443}, & C_{1232} &= C_{2343}, & C_{1241} &= C_{2434}, \\
C_{1212} &= C_{3434}, & C_{1342} &= \frac{1}{2}(C_{1212} - C_{1234}) = \frac{1}{2}(C_{3434} - C_{1234}).
\end{aligned} \tag{1.60}$$

Podemos hacer uso de las relaciones anteriores y las componentes del tensor de Riemann están relacionadas con el tensor de Weyl y Ricci por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
R_{1212} &= C_{1212} + R_{12} - \frac{1}{6}R, & R_{1324} &= C_{1324} + \frac{1}{12}R, & R_{1234} &= C_{1234}, \\
R_{3434} &= C_{3434} - R_{34} - \frac{1}{6}R, & R_{1313} &= C_{1313}, & R_{2323} &= C_{2323}, \\
R_{1314} &= R_{11}, & R_{2324} &= \frac{1}{2}R_{22}, & R_{3132} &= \frac{1}{2}R_{33}, & R_{1213} &= C_{1213} + R_{13}, \\
R_{1334} &= C_{1334} + \frac{1}{2}R_{13}, & R_{1223} &= C_{1223} - \frac{1}{2}R_{23}, & R_{2334} &= C_{2334} + \frac{1}{2}R_{23}.
\end{aligned} \tag{1.61}$$

En el formalismo de Newman-Penrose, los 10 componentes independientes del tensor de Weyl se representan por 5 escalares complejos

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= -C_{1313} = -C_{pqrs}l^p m^q l^r m^s, \\
\Psi_1 &= -C_{1213} = -C_{pqrs}l^p n^q l^r m^s, \\
\Psi_2 &= -C_{1342} = -C_{pqrs}l^p m^q \bar{m}^r n^s, \\
\Psi_3 &= -C_{1242} = -C_{pqrs}l^p n^q \bar{m}^r n^s, \\
\Psi_4 &= -C_{2424} = -C_{pqrs}n^p \bar{m}^q n^r \bar{m}^s.
\end{aligned} \tag{1.62}$$

Los campos gravitacionales se clasifican considerando la estructura algebraica del tensor de Weyl. Las diez componentes del tensor de Ricci están definidas en términos de cuatro escalares reales y tres escalares complejos, y se pueden encontrar por los componentes del tensor energía-momento de acuerdo con las ecuaciones de Einstein,

$$R_{ij} = -\frac{8\pi G}{c^4}(T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}T). \tag{1.63}$$

Los términos de Ricci pueden ser expresados de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\Phi_{00} &= \bar{\Phi}_{00} = \frac{1}{2}R_{\mu\nu}l^\mu l^\nu = -\frac{1}{2}R_{11}, \\
\Phi_{01} &= \bar{\Phi}_{10} = \frac{1}{2}R_{\mu\nu}l^\mu m^\nu = -\frac{1}{2}R_{13}, \\
\Phi_{02} &= \bar{\Phi}_{20} = \frac{1}{2}R_{\mu\nu}m^\mu m^\nu = -\frac{1}{2}R_{33}, \\
\Phi_{12} &= \bar{\Phi}_{21} = \frac{1}{2}R_{\mu\nu}m^\mu n^\nu = -\frac{1}{2}R_{23}, \\
\Phi_{11} &= \bar{\Phi}_{11} = \frac{1}{4}R_{\mu\nu}(l^\mu n^\nu + m^\mu \bar{m}^\nu) = -\frac{1}{4}(R_{12} + R_{34}), \\
\Phi_{10} &= \bar{\Phi}_{01} = \frac{1}{2}R_{\mu\nu}l^\mu \bar{m}^\nu = -\frac{1}{2}R_{14}, \\
\Phi_{20} &= \bar{\Phi}_{02} = \frac{1}{2}R_{\mu\nu}m^\mu \bar{m}^\nu = -\frac{1}{2}R_{44}, \\
\Phi_{21} &= \bar{\Phi}_{12} = \frac{1}{2}R_{\mu\nu}\bar{m}^\mu n^\nu = -\frac{1}{2}R_{24}, \\
\Phi_{22} &= \bar{\Phi}_{22} = \frac{1}{2}R_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = -\frac{1}{2}R_{22}, \\
\Omega &= \frac{1}{12}R_{\mu\nu}(l^\mu n^\nu + m^\mu \bar{m}^\nu) = \frac{1}{24}R = \frac{1}{12}(R_{12} + R_{34}).
\end{aligned} \tag{1.64}$$

donde las componentes  $T_{il}$  se puede escribir como las proyecciones del tensor  $T_{\mu\nu}$  sobre la base tetradial.

### 1.3.3. Las identidades de Ricci

De la ecuación (1.40) podemos escribir un total de 36 ecuaciones considerando los diferentes componentes en el formalismo tetradial; pero ahora en términos del formalismo de Newman-Penrose, es suficiente con escribir la mitad de las ecuaciones, la otra mitad se obtiene tomando el complejo conjugado de cada ecuación. Sustituyendo las derivadas direccionales y los coeficientes espín en la ecuación (1.40) se encuentran las siguientes 18 ecuaciones

$$\begin{aligned}
D\rho - \bar{\delta}\kappa &= (\rho^2 + \sigma\bar{\sigma}) + \rho(\varepsilon + \epsilon) - \bar{\kappa}\tau - \kappa(3\alpha + \bar{\beta} - \pi) + \Phi_{00}, & [R_{1314}] \\
D\sigma - \delta\kappa &= \sigma(\rho + \bar{\rho} + 3\varepsilon - \bar{\varepsilon}) - \kappa(\tau - \bar{\pi} + \bar{\alpha} + 3\beta) + \Psi_0, & [R_{1313}] \\
D\tau - \Delta\kappa &= \rho(\tau + \bar{\pi}) + \sigma(\bar{\tau} + \pi) + \tau(\varepsilon - \varepsilon) - \kappa(3\gamma + \bar{\gamma}) + \Psi_1 + \Phi_{01}, & [R_{1312}] \\
D\alpha - \bar{\delta}\varepsilon &= \alpha(\rho + \bar{\varepsilon} - 2\varepsilon) + \beta\bar{\sigma} - \bar{\beta}\varepsilon - \kappa\lambda - \bar{\kappa}\gamma + \pi(\varepsilon + \rho) + \Phi_{10}, & [\frac{1}{2}(R_{3414} - R_{1214})] \\
D\beta - \delta\varepsilon &= \sigma(\alpha + \pi) + \beta(\bar{\rho} - \bar{\varepsilon}) - \kappa(\mu + \gamma) - \varepsilon(\bar{\alpha} - \bar{\pi}) + \Psi_1, & [\frac{1}{2}(R_{1213} - R_{3413})] \\
D\gamma - \Delta\varepsilon &= \alpha(\tau + \bar{\pi}) + \beta(\tau + \bar{\pi}) - \gamma(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) - \varepsilon(\gamma + \bar{\gamma}) + \tau\pi - \nu\kappa + \Psi_2 + \Phi_{11} - \Lambda, \\
& [\frac{1}{2}(R_{1212} - R_{3412})] \\
D\lambda - \bar{\delta}\pi &= (\rho\lambda + \bar{\sigma}\mu) + \pi(\pi + \alpha - \beta) - \nu\bar{\kappa} - \lambda(3\varepsilon - \bar{\varepsilon}) + \Phi_{20}, & [R_{2441}] \\
D\mu - \delta\pi &= (\bar{\rho}\mu + \sigma\lambda) + \pi(\bar{\pi} + \bar{\alpha} + \beta) - \mu(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) - \nu\kappa + \Psi_2 + 2\Lambda, & [R_{2431}] \\
D\nu - \Delta\pi &= \mu(\pi + \bar{\tau}) + \lambda(\bar{\pi} + \tau) - \pi(\gamma - \bar{\gamma}) - \nu(3\varepsilon + \varepsilon) + \Psi_3 + \Phi_{21}, & [R_{2421}] \\
\Delta\lambda - \bar{\delta}\nu &= -\lambda(\mu + \bar{\mu} + 3\gamma + \bar{\gamma}) + \nu(3\alpha + \bar{\beta} + \pi - \bar{\tau}) - \Psi_4, & [R_{3143}] \\
\delta\rho - \bar{\delta}\sigma &= \rho(\bar{\alpha} + \beta) - \sigma(3\alpha - \bar{\beta}) + \tau(\rho - \bar{\rho}) + \kappa(\mu - \bar{\mu}) - \Psi_1 + \Phi_{01}, & [R_{3143}] \\
\delta\alpha - \bar{\delta}\beta &= (\mu\rho - \lambda\sigma) + \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - 2\alpha\beta + \gamma(\rho - \bar{\rho}) + \varepsilon(\mu - \bar{\mu}) - \Psi_2 + \Phi_{11} + \Lambda, \\
& [\frac{1}{2}(R_{1234} - R_{3434})] \\
\delta\lambda - \bar{\delta}\mu &= \nu(\rho - \bar{\rho}) + \pi(\mu - \bar{\mu}) + \mu(\alpha + \bar{\beta}) + \lambda(\bar{\alpha} - 3\beta) - \Psi_3 + \Phi_{21}, & [R_{2443}] \\
\delta\nu - \Delta\mu &= (\mu^2 + \lambda\bar{\lambda}) + \mu(\gamma + \bar{\gamma}) - \bar{\nu}\pi + \nu(\tau - 3\beta - \bar{\alpha}) + \Phi_{22}, & [R_{2423}] \\
\delta\gamma - \Delta\beta &= \gamma(\tau - \bar{\alpha} - \beta) + \mu\tau - \sigma\nu - \varepsilon\bar{\nu} - \beta(\gamma - \bar{\gamma} - \mu) + \alpha\bar{\lambda} + \Phi_{12}, & [\frac{1}{2}(R_{1232} - R_{3432})] \\
\delta\tau - \Delta\sigma &= (\mu\sigma + \bar{\lambda}\rho) + \tau(\tau + \beta - \bar{\alpha}) - \sigma(3\gamma - \bar{\gamma}) - \kappa\bar{\nu} + \Phi_{02}, & [R_{1332}] \\
\Delta\rho - \bar{\delta}\tau &= -(\rho\bar{\mu} + \sigma\lambda) + \tau(\bar{\beta} - \alpha - \bar{\tau}) + \rho(\gamma + \bar{\gamma}) + \nu\kappa - \Psi_2 - 2\Lambda, & [R_{1324}] \\
\Delta\alpha - \bar{\delta}\gamma &= \nu(\rho + \varepsilon) - \lambda(\tau + \beta) + \alpha(\bar{\gamma} - \bar{\mu}) + \gamma(\bar{\beta} - \bar{\tau}) - \Psi_3, & [\frac{1}{2}(R_{1242} - R_{3442})]
\end{aligned}$$

(1.65)

donde  $\Lambda \equiv \frac{R}{24}$ .

Cada una de las ecuaciones anteriores, contiene uno o más de los escalares de Weyl y de Ricci. La componente del tensor de Riemann, de la cual se obtuvo la ecuación, se indica a la derecha de cada ecuación.

### 1.3.4. Las identidades de Bianchi

Se obtienen 20 ecuaciones linealmente independientes de las identidades de Bianchi. Un conjunto de ocho identidades complejas esta dado por

$$\begin{aligned} R_{13[13|4]} = 0, & \quad R_{13[21|4]} = 0, & \quad R_{13[13|2]} = 0, & \quad R_{13[43|2]} = 0, \\ R_{42[13|4]} = 0, & \quad R_{42[21|4]} = 0, & \quad R_{42[13|2]} = 0, & \quad R_{42[43|2]} = 0. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Las formas explícitas de las ocho identidades complejas, escritas en términos de los coeficientes espín, de Weyl y de Ricci,

$$\begin{aligned} -\bar{\delta}\Psi_0 + D\Psi_1 + (4\alpha - \pi)\Psi_0 - 2(2\rho + \varepsilon)\Psi_1 + 3\kappa\Psi_2 + [\text{Ricci(a)}] &= 0, & R_{13[13|4]} &= 0, \\ -\bar{\delta}\Psi_1 - D\Psi_2 - \lambda\Psi_0 + 2(\pi - \alpha)\Psi_1 + 3\rho\Psi_2 - 2\kappa\Psi_3 + [\text{Ricci(b)}] &= 0, & R_{13[21|4]} &= 0, \\ -\bar{\delta}\Psi_2 + D\Psi_3 + 2\lambda\Psi_1 - 3\pi\Psi_2 + 2(\varepsilon - \rho)\Psi_3 + \kappa\Psi_4 + [\text{Ricci(c)}] &= 0, & R_{42[13|4]} &= 0, \\ \bar{\delta}\Psi^3 - D\Psi_4 - 3\lambda\Psi_2 + 2(2\pi + \alpha)\Psi_3 - (4\varepsilon - \rho)\Psi_4 + [\text{Ricci(d)}] &= 0, & R_{42[21|4]} &= 0, \\ -\Delta\Psi_0 + \delta\Psi_1 + (4\gamma - \mu)\Psi_0 - 2(2\tau + \beta)\Psi_1 + 3\sigma\Psi_2 + [\text{Ricci(e)}] &= 0, & R_{13[13|2]} &= 0, \\ -\Delta\Psi_1 + \delta\Psi_2 + \nu\Psi_0 + 2(\gamma - \mu)\Psi_1 - 3\tau\Psi_2 + 2\sigma\Psi_3 + [\text{Ricci(f)}] &= 0, & R_{13[43|2]} &= 0, \\ -\Delta\Psi_2 + \delta\Psi_3 + 2\nu\Psi_1 - 3\mu\Psi_2 + 2(\beta - \tau)\Psi_3 + \sigma\Psi_4 + [\text{Ricci(g)}] &= 0, & R_{42[13|2]} &= 0, \\ -\Delta\Psi_3 + \delta\Psi_4 + 3\nu\Psi_2 - 2(\gamma + 2\mu)\Psi_3 - (\tau - 4\beta)\Psi_4 + [\text{Ricci(h)}] &= 0, & R_{42[43|2]} &= 0. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Los términos del tensor de Ricci entre corchetes se expresan de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & -D\Phi_{01} + \delta\Phi_{00} + 2(\varepsilon + \bar{\rho})\Phi_{01} + 2\sigma\Phi_{10} - 2\kappa\Phi_{11} - \bar{\kappa}\Phi_{02} + (\bar{\pi} - 2\bar{\alpha} - 2\beta)\Phi_{00}, \\ \text{(b)} \quad & (-\Delta - \bar{\mu} + 2\gamma + 2\bar{\gamma})\Phi_{00} + (\bar{\delta} - 2\alpha - 2\bar{\tau})\Phi_{01} + 2\rho\Phi_{11} + \bar{\sigma}\Phi_{02} - 2\tau\Phi_{10} - 2D\Lambda, \\ \text{(c)} \quad & (\delta - 2\bar{\alpha} + 2\beta\bar{\pi})\Phi_{20} - (D - 2\bar{\rho} + 2\varepsilon)\Phi_{21} - 2\mu\Phi_{10} + 2\pi\Phi_{11} - \bar{\kappa}\Phi_{22} - 2\bar{\delta}\Lambda, \\ \text{(d)} \quad & -\Delta\Phi_{20} + \bar{2}\bar{1} + 2(\alpha - \bar{\tau})\Phi_{21} + 2\nu\Phi_{10} + \bar{\sigma}\Phi_{22} - 2\lambda\Phi_{11} - (\bar{\mu} + 2\gamma - 2\bar{\gamma})\Phi_{20}, \\ \text{(e)} \quad & -D\Phi_{02} + \delta\Phi_{01} + 2(\bar{\pi} - \beta)\Phi_{01} - 2\kappa\Phi_{12} - \bar{\lambda}\Phi_{00} + 2\sigma\Phi_{11} + (\bar{\rho} - 2\varepsilon - 2\bar{\varepsilon})\Phi_{02}, \\ \text{(f)} \quad & -(\bar{\delta} - \bar{\tau} + 2\bar{\beta} - 2\alpha)\Phi_{02} + (\Delta + 2\bar{\mu} - 2\gamma)\Phi_{01} - 2\rho\Phi_{12} - \bar{\nu}\Phi_{00} + 2\tau\Phi_{11} + 2\delta\Lambda, \\ \text{(g)} \quad & (-D + \bar{\rho} - 2\varepsilon - 2\bar{\varepsilon})\Phi_{22} + (\bar{\delta} + 2\pi + 2\beta)\Phi_{21} - 2\mu\Phi_{11} - \bar{\lambda}\Phi_{20} + 2\pi\Phi_{12} - 2\Delta\Lambda, \\ \text{(h)} \quad & \Delta\Phi_{21} - \bar{\delta}\Phi_{22} + 2(\bar{\mu} + \gamma)\Phi_{21} - 2\nu\Phi_{11} - \bar{\nu}\Phi_{20} + 2\lambda\Phi_{12} + (\bar{\tau} - 2\alpha - 2\bar{\beta})\Phi_{22}. \end{aligned} \quad (1.68)$$

y tres identidades reales se obtiene de la relación

$$\eta^{bc}(R_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}R)_{|c} = 0. \quad (1.69)$$

Para las tres identidades reales de la ecuación (1.69) tenemos

$$\begin{aligned} \bar{\delta}\Phi_{01} + \delta\Phi_{10} - D(\Phi_{11} + 3\Lambda) - \Delta\Phi_{00} &= -\sigma\Phi_{20} + [\mu + \bar{\mu} - 2(\gamma + \bar{\gamma})]\Phi_{00} \\ \bar{\kappa}\Phi_{12} + \kappa\Phi_{21} + (2\alpha + 2\bar{\tau} - \pi)\Phi_{01} + (2\bar{\alpha} + 2\tau - \bar{\pi})\Phi_{01} - 2(\rho + \bar{\rho})\Phi_{11} - \bar{\sigma}\Phi_{02}; \\ \bar{\delta}\Phi_{12} + \delta\Phi_{21} - \Delta(\Phi_{11} + 3\Lambda) - D\Phi_{22} &= -(\rho\bar{\rho} - 2\varepsilon - 2\bar{\varepsilon})\Phi_{22} + \lambda\Phi_{22} + \bar{\lambda}\Phi_{02} \\ -\nu\Phi_{01} - \bar{\nu}\Phi_{10} + (\bar{\tau} - 2\bar{\beta} - 2\beta)\Phi_{12} + (\tau - 2\beta - 2\bar{\pi})\Phi_{21} + 2(\mu + \bar{\mu})\Phi_{11}; \\ \delta(\Phi_{11} - 3\Lambda) - D\Phi_{12} - \Delta\Phi_{01} + \bar{\delta}\Phi_{02} &= -(2\rho + \bar{\rho} - 3\varepsilon)\Phi_{12} + (2\bar{\mu} + \mu - 2\gamma)\Phi_{01} \\ \kappa\Phi_{22} - \bar{\nu}\Phi_{00} + (\bar{\tau} - \pi + 2\alpha - 2\bar{\beta})\Phi_{02} - \sigma\Phi_{21} + \bar{\lambda}\Phi_{10} + 2(\tau - \bar{\pi})\Phi_{11} \end{aligned} \quad (1.70)$$

En el vacío, los escalares de Ricci se anulan, y se obtiene ocho ecuaciones complejas con el término de Ricci igual a cero en las identidades de Bianchi de la ecuación (1.67).

### 1.3.5. La clasificación de Petrov

El tensor de Weyl puede ser completamente descrito en términos de cinco escalares  $\Psi_\alpha$  donde  $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$ , los cuales dependen directamente de la elección de la tétrada. Entonces es factible preguntarse si es posible encontrar una transformación que haga uno o más de los  $\Psi_\alpha$  iguales a cero. Para ello sin pérdida de generalidad supondremos que  $\Psi_4 \neq 0$  para transformaciones de la forma:

*Transformación Clase I*

$$l \rightarrow l, \quad m \rightarrow m + al, \quad \bar{m} \rightarrow \bar{m} + \bar{a}l \quad y, \quad n \rightarrow n + \bar{a}m + a\bar{m} + a\bar{a}l \quad (1.71)$$

los escalares de Weyl se transforman

$$\begin{aligned} \Psi_0 &\rightarrow \Psi_0, \quad \Psi_1 \rightarrow \Psi_1 + \bar{a}\Psi_0, \quad \Psi_2 \rightarrow \Psi_2 + 2\bar{a}\Psi_1 + (\bar{a})^2\Psi_0 \\ \Psi_3 &\rightarrow \Psi_3 + 3\bar{a}\Psi_2 + 3(\bar{a})^2\Psi_1 + (\bar{a})^3\Psi_0, \\ \Psi_4 &\rightarrow \Psi_4 + 4\bar{a}\Psi_3 + 6(\bar{a})^2\Psi_2 + 4(\bar{a})^3\Psi_1 + (\bar{a})^4\Psi_4 \end{aligned} \quad (1.72)$$

y para la transformación de la forma

*Transformación Clase II*

$$n \rightarrow n, \quad m + bn, \quad \bar{m} \rightarrow \bar{m} + \bar{b}n \quad y \quad l \rightarrow l + \bar{b}m + b\bar{m} + b\bar{b}l; \quad (1.73)$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &\rightarrow \Psi_0 + 4b\Psi_1 + 6b^2\Psi_2 + 4b^3\Psi_3 + b^4\Psi_4, \\
\Psi_1 &\rightarrow \Psi_1 + 3b\Psi_2 + 3b^2\Psi_3 + b^3\Psi_4, \\
\Psi_2 &\rightarrow \Psi_2 + 2b\Psi_3 + b^2\Psi_4, \\
\Psi_3 &\rightarrow \Psi_3 + b\Psi_4, \quad \Psi_4 \rightarrow \Psi_4.
\end{aligned} \tag{1.74}$$

Para el escalar  $\Psi_0$  de la expresión anterior sea cero debemos elegir al parámetro  $b$  de la forma tal que sea la raíz cuártica de la ecuación

$$\Psi_4 b^4 + 4\Psi_3 b^3 + 6\Psi_2 b^2 + 4\Psi_1 b + \Psi_0 = 0, \tag{1.75}$$

esta ecuación tiene en general cuatro raíces complejas. Las direcciones resultantes del nuevo vector  $l$  son

$$l + \bar{b}m + b\bar{m} + \bar{b}n, \tag{1.76}$$

que son conocidas como *las direcciones principales del tensor de Weyl*. Cuando alguna de las raíces de la ecuación (1.75) coincide se dice que el espacio-tiempo es algebraicamente especial. Esta es la base de la clasificación de Petrov que separa a los espacio-tiempo de acuerdo con el número de raíces distintas de la ecuación (1.75):

**Tipo I:** Las cuatro raíces  $b_1, b_2, b_3$  y  $b_4$  son distintas, en este caso podemos hacer una transformación de clase II con  $b$  igual a cualquiera de las otras raíces, que va a dar como resultado  $\Psi_0 = 0$ . Después podemos hacer una transformación de clase I para hacer  $\Psi_4 = 0$  manteniendo  $\Psi_0 = 0$ . Para Petrov Tipo I, es posible escoger una tétrada para un espacio tiempo de forma tal que sólo  $\Psi_1, \Psi_2$  y  $\Psi_3$  sean distintos de cero.

**Tipo II:** Dos raíces coinciden  $b_1 = b_2, b_3, b_4$ . En este caso la derivada de (1.75) con respecto a  $b$  debe anularse para  $b = b_1$ . Y viendo la transformación de  $\Psi_1$  podemos ver que esto implica que  $\Psi_1$  también se anula. Entonces cuando  $b = b_1$  es posible hacer  $\Psi_0 = 0$  y  $\Psi_1 = 0$ , como en el caso anterior podemos hacer una transformación de clase I para hacer  $\Psi_4 = 0$ . Para un espacio-tiempo tipo II siempre es posible escoger una tétrada donde sólo  $\Psi_2$  y  $\Psi_3$  son distintos de cero. Espacios-tiempo tipo II combinan los efectos de Tipo D, III y N pero de una manera no-lineal más complicada.

**Tipo III:** Tres raíces coinciden  $b_1 = b_2 = b_3, b_4$ . Siguiendo los argumentos anteriores vemos que eligiendo  $b = b_1$  tanto la primera como la segunda derivada de (1.75) con respecto a  $b$  se anulan lo que implica que  $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = 0$ . Por lo tanto para espacios-tiempo de Tipo III siempre es escoger una tétrada donde sólo  $\Psi_3$  es distinto de cero.

**Tipo N:** Todas las raíces coinciden  $b_1 = b_2 = b_3 = b_4$ . Con el mismo argumento se tiene que para una transformación de clase II tenemos  $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0$ , sin embargo ahora no es posible hacer que  $\Psi_4$  sea no nulo.

**Tipo D:** Dos pares de raíces coinciden  $b_1 = b_2$ ,  $b_3 = b_4$ . Este caso debido a las dos raíces dobles necesariamente la transformación de clase II para  $\Psi_0$  debe de tener la forma  $\Psi_0 \rightarrow \Psi_4(b-b_1)^2(b-b_2)^2$ . Esto debe de cumplirse sin importar los valores de los  $\Psi_\alpha$ . Podemos obtener transformaciones de los  $\Psi_\alpha$  como derivadas de estas transformaciones con respecto a  $b$  y con el apropiado reescalamiento tenemos:

$$\begin{aligned}\Psi_1 &\rightarrow \frac{\Psi_4}{2}(b-b_1)(b-b_2)(2b-b_1-b_2), \\ \Psi_2 &\rightarrow \frac{\Psi_4}{6}[6b_2-6b(b_1-b_2)+b_1^2+b_2^2+4b_1b_2], \\ \Psi_3 &\rightarrow \frac{\Psi_4}{2}(2b-b_1-b_2), \\ \Psi_4 &\rightarrow \Psi_4.\end{aligned}$$

Podemos ahora sustituir estas nuevas variables en una transformación de clase I para encontrar que después de estas transformaciones  $\Psi_4$  se convierte en:

$$\Psi_4 \rightarrow \Psi_4[\bar{a}(b-b_1)+1]^2 + [\bar{a}(b-b_2)+1]^2. \quad (1.77)$$

Escojamos ahora  $b = b_1$ , entonces antes de la primera transformación teníamos  $\Psi_0 = \Psi_1$  (doble raíz). Después, para la segunda transformación tenemos:

$$\Psi_4 \rightarrow \Psi_4[\bar{a}(b_1-b_2)+1]^2. \quad (1.78)$$

Esto muestra que la ecuación cuártica en donde  $\Psi_4$  se anula tiene una doble raíz  $\bar{a} = \frac{1}{b_2-b_1}$ . Tomando en cuenta este valor para  $\bar{a}$  podemos hacer ahora tanto  $\Psi_4$  como  $\Psi_3$  cero mientras mantengamos  $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$ . El resultado final es que para un espacio-tiempo tipo D podemos siempre escoger una transformación donde sólo  $\Psi_2$  sea distinto de cero (o en algunos casos para  $\Psi_4$ ). Los espacios-tiempo tipo D estan asociados con campos gravitacionales de cuerpos masivos aislados, tales como estrellas, hoyos negros, etc. Más precisamente, los espacios-tiempo tipo D suceden cuando un objeto es caracterizado por su masa y su momento angular. Las dos direcciones principales están definidas radialmente, hacia adentro y hacia afuera del objeto. Los ejemplos más relevantes de espacios-tiempo tipo D son los hoyos negros de Schwarzschild y de Kerr en el vacío.

**Tipo O:** El tensor de Weyl se anula idénticamente, es decir, el espacio-tiempo es conformemente plano. Los ejemplos carecterísticos de este tipo de espacio-tiempo son el espacio-tiempo de Minkowski y el espacio-tiempo cosmológico de Friedman-Robertson-Walker. En este espacio tiempo los efectos gravitacionales deben ser nulos.

### 1.3.6. Las ecuaciones de Maxwell en el formalismo de Newman-Penrose

En el Formalismo de Newman-Penrose, el tensor antisimétrico de Maxwell  $F_{ij}$ , se reemplaza por tres escalares complejos

$$\begin{aligned}\phi_0 &= F_{13} = F_{ij}l^i m^j, \\ \phi_1 &= \frac{1}{2}(F_{12} + F_{43}) = \frac{1}{2}F_{ij}(l^i m_j + \bar{m}^i m^j), \\ \phi_2 &= F_{42} = F_{ij}\bar{m}^i n^j,\end{aligned}\tag{1.79}$$

y las ecuaciones de Maxwell para el vacío, son

$$F_{[ij;k]} = 0 \quad \text{y} \quad g^{ik}F_{ij;k} = 0,\tag{1.80}$$

expresando las ecuaciones de Maxwell en términos de componentes tetradiales y de las derivadas intrínsecas,

$$F_{[ab|c]} = 0 \quad \text{y} \quad \eta^{nm}F_{an|m} = 0.\tag{1.81}$$

Utilizando el formalismo desarrollado hasta el momento, podemos expresar los escalares de la ecuación (1.79) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\phi_{1|1} - \phi_{0|4} &= 0, & \phi_{2|1} - \phi_{1|4} &= 0, \\ \phi_{1|3} - \phi_{0|2} &= 0, & \phi_{2|3} - \phi_{1|2} &= 0.\end{aligned}\tag{1.82}$$

Las formas explícitas para las ecuaciones de Maxwell que se obtienen al utilizar las ecuaciones anteriores, son

$$\begin{aligned}\phi_{1|1} &= \frac{1}{2}[F_{12,1} - \eta^{nm}(\gamma_{n11}F_{m2} + \gamma_{n21}F_{1m}) + F_{43,1} - \eta^{nm}(\gamma_{n41}F_{m3} + \gamma_{n31}F_{m4})] \\ &= \phi_{1,1} - (\gamma_{131}F_{42} + \gamma_{241}F_{13}) = D\phi_1 + k\phi_2 - \pi\phi_0, \\ \phi_{0|4} &= \bar{\delta}\phi_0 - 2\alpha\phi_0 + 2\rho\phi_1,\end{aligned}\tag{1.83}$$

con las expresiones de la ecuación (1.83), la primera ecuación de Maxwell con fuentes en la ecuación (1.82), toma la siguiente forma

$$(\bar{\delta} + \pi - 2\alpha)\phi_0 - (D - 2\rho)\phi_1 - \kappa\phi_2 = l^i 2\pi j_i.\tag{1.84}$$

Las tres ecuaciones restantes se obtienen de la misma manera que la ecuación anterior y toman la forma

$$\begin{aligned}(\bar{\delta} + 2\pi)\phi_1 - (D - \rho + 2\varepsilon)\phi_2 - \lambda\phi_0 &= \bar{m}^i 2\pi j_i, \\ (\Delta + \mu - 2\gamma)\phi_0 - (\delta - 2\tau)\phi_1 - \sigma\phi_2 &= m^i 2\pi j_i, \\ (\Delta + 2\mu)\phi_1 - (\delta - \tau + 2\beta)\phi_2 - \nu\phi_0 &= n^i 2\pi j_i.\end{aligned}\tag{1.85}$$

Estas ecuaciones están escritas en el sistema de unidades donde  $c = 1$  y  $j_i$  es la cuadrivector. Regresando al tensor de energía-momento del campo de Maxwell, tenemos

$$4\pi T_{ab} = \eta^{cd} F_{ac} F_{bd} - \frac{1}{2} \eta_{ab} F_{ef} F^{ef}, \quad (1.86)$$

en términos de los escalares de Maxwell  $\phi_0, \phi_1$  y  $\phi_2$  encontramos

$$\begin{aligned} -2\pi T_{11} &= \phi_0 \bar{\phi}_0, & -2\pi T_{13} &= \phi_0 \bar{\phi}_1, \\ -\pi(T_{12} + T_{34}) &= \phi_1 \bar{\phi}_1, & -2\pi T_{23} &= \phi_1 \bar{\phi}_2, \\ -2\pi T_{22} &= \phi_2 \bar{\phi}_2, & -2\pi T_{33} &= \phi_0 \bar{\phi}_2, \end{aligned} \quad (1.87)$$

donde la traza de  $T_{ab}$  es cero. De acuerdo con las ecuaciones (1.63) y (1.64), podemos determinar que  $\Lambda = 0$  y reemplazar,

$$\Phi_{mn} \quad \text{por} \quad 2\phi_m \bar{\phi}_n, \quad (1.88)$$

### 1.3.7. Clasificación del tensor de campo electromagnético

El tensor del campo electromagnético  $F_{ij}$ , también puede clasificarse algebraicamente tomando en cuenta las posibles coincidencias de sus direcciones principalmente nulas. Un cuadvivector  $\kappa^i$  distinto de cero, define una dirección principal de  $F_{ij}$  si

$$k^i F_{i[j} \kappa_{k]} = 0. \quad (1.89)$$

Esta condición implica que  $\kappa^i$  es nula y que en cada punto del espacio-tiempo donde  $F_{ij}$  es algebraicamente general, si todas las direcciones principales son distintas, o algebraicamente especial si las dos direcciones principales coinciden. Equivalentemente, la clasificación del tensor de campo electromagnético puede hacerse con base en la multiplicidad de las raíces del polinomio

$$\phi_0 + 2\phi_1 b + \phi_2 b^2 = 0, \quad (1.90)$$

donde  $b$  es compleja.

Se puede probar que el vector  $l^i$  de la tétrada es una dirección principal de  $F_{ij}$  si y solo si  $\phi_0 = 0$ , y que  $l^i$  es una dirección principal repetida si y solo si  $\phi_0 = \phi_1 = 0$ . Cuando el campo electromagnético es algebraicamente general, los vectores  $l^i$  y  $n^i$  pueden escogerse de tal manera que sólo  $\phi_1$  sea distinto de cero.

Algunos de los coeficientes espín se les puede dar un significado geométrico relacionado con las curvas integrales de los vectores tetradiales. En particular  $\kappa = 0$  si y solo si  $l^i$  es tangente a una familia de curvas geodésicas nulas. Si además  $\sigma = 0$ , dicha familia no tiene distorsión, lo que significa que las curvas de las familias pueden girar, divergir o convergir, pero de tal forma que, a primer orden, no cambia la forma del perfil de una haz en estas curvas.

### 1.3.8. Teorema de Peeling

En Relatividad General, el teorema de Peeling describe el comportamiento asintótico del tensor de Weyl cuando este tiende a infinito nulo. Sea  $\gamma$  una geodésica nula en el espacio-tiempo  $(M, g_{ab})$  a partir de un punto  $p$  a infinito nulo, con un parámetro afín  $\lambda$ . Entonces, el teorema afirma que, cuando  $\lambda$  tiende a infinito:

$$C_{abcd} = \frac{C_{abcd}^{(1)}}{\lambda} + \frac{C_{abcd}^{(2)}}{\lambda^2} + \frac{C_{abcd}^{(3)}}{\lambda^3} + \frac{C_{abcd}^{(4)}}{\lambda^4} + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right), \quad (1.91)$$

donde  $C_{abcd}$  es el tensor de Weyl y usamos la notación de índices abstractos. Por otra parte, en la clasificación de Petrov,  $C_{abcd}^{(1)}$  es tipo N,  $C_{abcd}^{(2)}$  es tipo III,  $C_{abcd}^{(3)}$  es tipo II y  $C_{abcd}^{(4)}$  es tipo I. Se puede revisar más del tema en [18].

Como se ha visto, en este capítulo se han revisado elementos importante de la Relatividad General como lo son el tensor de Riemann, el tensor de Ricci, el escalar de curvatura, las identidades de Bianchi y de Ricci. Además se revisaron dos formalismos importantes para el análisis y estudio de la Relatividad General.

## Capítulo 2

# Perturbaciones gravitacionales y electromagnéticas en el formalismo de Newman-Penrose

En este capítulo se derivan las expresiones para las perturbaciones completas de las soluciones de las ecuaciones de Einstein con fuentes, de tal forma que se obtiene la ecuación de Teukolsky incluyendo fuentes.

### 2.1. Ecuación de Teukolsky con fuentes en el formalismo de Newman-Penrose

En esta sección, usaremos las ecuaciones perturbadas de Einstein para obtener la ecuación de Teukolsky con fuentes [16],[17] que nos permite analizar objetos astrofísicos. En el caso de vacío, regresamos a los resultados clásicos de la ecuación de Teukolsky sin fuentes.

En el formalismo Newman-Penrose existen seis ecuaciones - cuatro identidades de Bianchi y dos identidades de Ricci - las cuales son lineales y homogéneas en las cantidades, las cuales se cancelan idénticamente en el fondo, (ver capítulo 1 de [15], ecuaciones 321 (d), (h)), donde las identidades de Bianchi  $R_{42[21|4]}$  y  $R_{42[43|2]}$  ya mencionadas en (1.67) y (1.68) son

$$\begin{aligned} & (D + \eta_{12}(4\epsilon - \rho))\Psi_4 - (\bar{\delta} + 2\eta_{12}(2\pi + \alpha))\Psi_3 + (3\eta_{12}\Psi_2 + 2\Phi_{11})\lambda \\ = & \eta_{12}(\bar{\delta} + 2\eta_{12}(\alpha - \bar{\tau}))\Phi_{21} - \eta_{12}(\Delta + \eta_{12}(\bar{\mu} + 2\gamma - 2\bar{\gamma}))\Phi_{20} + 2\nu\Phi_{10} + \bar{\sigma}\Phi_{22}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}
& -(\delta + \eta_{12}(4\beta - \tau))\Psi_4 + (\Delta + 2\eta_{12}(\gamma + 2\mu))\Psi_3 - (3\eta_{12}\Psi_2 - 2\Phi_{11})\nu \\
& = -\eta_{12}(\bar{\delta} + \eta_{12}(-\bar{\tau} + 2\alpha + 2\bar{\beta}))\Phi_{22} + \eta_{12}(\Delta + 2\eta_{12}(\bar{\mu} + \gamma))\Phi_{21} - \bar{\nu}\Phi_{20} + 2\lambda\Phi_{12}, \quad (2.2)
\end{aligned}$$

considerando la identidad de Riemann  $R_{2442}$ , llegamos a  $\Psi_4$  a partir de la ecuación 310(j) de [15]:

$$\Psi_4 + (\Delta + \eta_{12}(\mu + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma}))\lambda - (\bar{\delta} + \eta_{12}(3\alpha + \bar{\beta} + \pi - \bar{\tau}))\nu = 0. \quad (2.3)$$

Las ecuaciones están linealizadas en el sentido que los escalares de Weyl  $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_3, \Psi_4$  y los coeficientes spin  $\kappa, \sigma, \lambda, \rho, \nu, \epsilon, \beta, \gamma, \mu, \alpha, \tau, \pi$  y  $\nu$  como perturbaciones, son tomadas a primer orden solamente. Vamos a llegar a las ecuaciones que involucran  $\Psi_4$  debido a que es una medida invariante en la teoría de perturbaciones lineales. Estos componentes son los más significativos en radiación gravitacional la cual representa ondas salientes [16],[17]. Perturbando las ecuaciones de fondo, a partir de las ecuaciones (2.1) y (2.2), tenemos

$$\begin{aligned}
& (D + \eta_{12}(4\epsilon - \rho))\Psi_4^{(1)} - (\bar{\delta} + 2\eta_{12}(2\pi + \alpha))\Psi_3^{(1)} + (D + \eta_{12}(4\epsilon - \rho))^{(1)}\Psi_4 \\
& - (\bar{\delta} + 2\eta_{12}(2\pi + \alpha))^{(1)}\Psi_3 + (3\eta_{12}\Psi_2 + 2\Phi_{11})\lambda^{(1)} + (3\eta_{12}\Psi_2 + 2\Phi_{11})^{(1)}\lambda \\
& = \eta_{12}(\bar{\delta} + 2\eta_{12}(\alpha - \bar{\tau}))\Phi_{21}^{(1)} + \eta_{12}(\bar{\delta} + 2\eta_{12}(\alpha - \bar{\tau}))^{(1)}\Phi_{21} - \eta_{12}(\Delta + \eta_{12}(\bar{\mu} + 2\gamma - 2\bar{\gamma}))\Phi_{20}^{(1)} \\
& - \eta_{12}(\Delta + \eta_{12}(\bar{\mu} + 2\gamma - 2\bar{\gamma}))^{(1)}\Phi_{20} + 2\nu\Phi_{10}^{(1)} + 2\nu^{(1)}\Phi_{10} + \bar{\sigma}^{(1)}\Phi_{22} + \bar{\sigma}\Phi_{22}^{(1)}, \quad (2.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\delta + \eta_{12}(4\beta - \tau))\Psi_4^{(1)} + (\Delta + 2\eta_{12}(\gamma + 2\mu))\Psi_3^{(1)} - (\delta + \eta_{12}(4\beta - \tau))^{(1)}\Psi_4 \\
& + (\Delta + 2\eta_{12}(\gamma + 2\mu))^{(1)}\Psi_3 - (3\eta_{12}\Psi_2 - 2\Phi_{11})\nu^{(1)} - (3\eta_{12}\Psi_2 - 2\Phi_{11})^{(1)}\nu \\
& = -\eta_{12}(\bar{\delta} + \eta_{12}(-\bar{\tau} + 2\alpha + 2\bar{\beta}))^{(1)}\Phi_{22} - \eta_{12}(\bar{\delta} + \eta_{12}(-\bar{\tau} + 2\alpha + 2\bar{\beta}))\Phi_{22}^{(1)} \\
& + \eta_{12}(\Delta + 2\eta_{12}(\bar{\mu} + \gamma))\Phi_{21}^{(1)} + \eta_{12}(\Delta + 2\eta_{12}(\bar{\mu} + \gamma))^{(1)}\Phi_{21} + 2\lambda\Phi_{12}^{(1)} + \\
& 2\lambda^{(1)}\Phi_{12} - \bar{\nu}\Phi_{20}^{(1)} - \bar{\nu}^{(1)}\Phi_{20}. \quad (2.5)
\end{aligned}$$

La perturbación de la identidad de Riemann (2.3) está expresada por,

$$\begin{aligned}
& \Psi_4^{(1)} + (\Delta + \eta_{12}(\mu + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma}))^{(1)}\lambda - (\bar{\delta} + \eta_{12}(3\alpha + \bar{\beta} + \pi - \bar{\tau}))^{(1)}\nu \\
& + (\Delta + \eta_{12}(\mu + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma}))\lambda^{(1)} - (\bar{\delta} + \eta_{12}(3\alpha + \bar{\beta} + \pi - \bar{\tau}))\nu^{(1)} = 0, \quad (2.6)
\end{aligned}$$

multiplicando la ecuación (2.6) por  $\Psi_2$  y factorizando términos obtenemos

$$\begin{aligned}
& \Psi_4^{(1)}\Psi_2 + [(\Delta + \eta_{12}(\mu + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma}))\lambda^{(1)}]\Psi_2 - [(\bar{\delta} + \eta_{12}(3\alpha + \bar{\beta} + \pi - \bar{\tau}))\nu^{(1)}]\Psi_2 \\
& + (\Delta + \eta_{12}(\mu + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma}))^{(1)}(\lambda\Psi_2) + \lambda^{(1)}(\Delta\Psi_2) - (\bar{\delta} + \eta_{12}(3\alpha + \bar{\beta} + \pi - \bar{\tau}))^{(1)}(\nu\Psi_2) \\
& - \nu^{(1)}(\bar{\delta}\Psi_2) = 0, \quad (2.7)
\end{aligned}$$

donde tuvimos que utilizar las siguientes identidades de Bianchi y Ricci  $R_{42[13]2}$  y  $R_{42[13]4}$

$$\begin{aligned}
& \Delta\Psi_2 + 3\eta_{12}\mu\Psi_2 = (\delta + 2\eta_{12}(\beta - \tau))\Psi_3 + 2\eta_{12}\nu\Psi_1 + \eta_{12}\sigma\Psi_4 + \eta_{12}[-(D - \eta_{12}(\bar{\rho} - 2\epsilon - 2\bar{\epsilon}))\Phi_{22} \\
& + (\delta + 2\eta_{12}(\bar{\pi} + \beta))\Phi_{21} - 2\eta_{12}\mu\Phi_{11} - \eta_{12}\bar{\lambda}\Phi_{20} + 2\eta_{12}\pi\Phi_{12} + 2\Delta\Lambda], \quad (2.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\delta}\Psi_2 + 3\eta_{12}\pi\Psi_2 &= (D + 2\eta_{12}(\epsilon - \rho))\Psi_3 + 2\eta_{12}\lambda\Psi_1 + \eta_{12}\kappa\Psi_4 + \eta_{12}[-(D - 2\eta_{12}(\bar{\rho} - \epsilon))\Phi_{21} \\ &+ (\delta + \eta_{12}(\bar{\pi} - 2(\bar{\alpha} - \beta))\Phi_{20} - 2\eta_{12}\mu\Phi_{10} + 2\eta_{12}\pi\Phi_{11} - \eta_{12}\bar{\kappa}\Phi_{22} + 2\bar{\delta}\Lambda], \end{aligned} \quad (2.9)$$

con el fin de encontrar la ecuación de Teukolsky con fuentes, usamos (2.8) y (2.9) dentro de (2.7) para obtener

$$\begin{aligned} &(\Delta + \eta_{12}(\mu + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma}))^{(1)}(\lambda\Psi_2) - (\bar{\delta} + \eta_{12}(3\alpha + \bar{\beta} + \pi - \bar{\tau}))^{(1)}(\nu\Psi_2) \\ &+ \Psi_2[(\Delta + \eta_{12}(4\mu + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma}))\lambda^{(1)} - (\bar{\delta} + \eta_{12}(3\alpha + \bar{\beta} + 4\pi - \bar{\tau}))\nu^{(1)}] + \Psi_4^{(1)}\Psi_2 = \\ &-\lambda^{(1)}\{(\delta + 2\eta_{12}(\beta - \tau))\Psi_3 + 2\eta_{12}\nu\Psi_1 + \eta_{12}\sigma\Psi_4 + \eta_{12}[-(D - \eta_{12}(\bar{\rho} - 2\epsilon - 2\bar{\epsilon}))\Phi_{22} \\ &+ (\delta + 2\eta_{12}(\bar{\pi} + \beta))\Phi_{21} - 2\eta_{12}\mu\Phi_{11} - \eta_{12}\bar{\lambda}\Phi_{20} + 2\eta_{12}\pi\Phi_{12} + 2\Delta\Lambda]\} \\ &+ \nu^{(1)}\{(D + 2\eta_{12}(\epsilon - \rho))\Psi_3 + 2\eta_{12}\lambda\Psi_1 + \eta_{12}\kappa\Psi_4 + \eta_{12}[-(D - 2\eta_{12}(\bar{\rho} - \epsilon))\Phi_{21} \\ &+ (\delta + \eta_{12}(\bar{\pi} - 2(\bar{\alpha} - \beta))\Phi_{20} - 2\eta_{12}\mu\Phi_{10} + 2\eta_{12}\pi\Phi_{11} - \eta_{12}\bar{\kappa}\Phi_{22} + 2\bar{\delta}\Lambda]\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Usando la ecuación (2.10) simplificaremos algunos términos en nuestra ecuación general, sin embargo, llegamos a una expresión más complicada que Teukolsky dado que tenemos términos de Ricci. Finalmente, las siguientes identidades de Ricci son útiles para eliminar coeficientes perturbados, para este caso partimos de la ecuación (1.69) la cual explícitamente nos proporciona dos ecuaciones reales

$$\begin{aligned} R_{11|2} + R_{34|1} - R_{13|4} - R_{14|3} &= 0, \\ R_{22|1} + R_{34|2} - R_{23|4} - R_{24|3} &= 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

y la única ecuación compleja

$$R_{33|4} + R_{12|3} - R_{31|2} - R_{32|1} = 0.$$

En el formalismo de tétradas

$$\begin{aligned} &(\bar{\delta} + \eta_{12}(\pi - 2\alpha - 2\bar{\tau}))\Phi_{01} + (\delta + \eta_{12}(\bar{\pi} - 2\bar{\alpha} - 2\tau))\Phi_{10} \\ &- (\Delta + \eta_{12}(\mu + \bar{\mu} - 2(\gamma + \bar{\gamma})))\Phi_{00} - D(\Phi_{11} - 2\eta_{12}(\rho + \bar{\rho})\Phi_{11} + 3\Lambda) \\ &- \eta_{12}(\bar{\kappa}\Phi_{12} + \kappa\Phi_{21} - \bar{\sigma}\Phi_{02} - \sigma\Phi_{20}) = 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} &(\bar{\delta} - \eta_{12}(\bar{\tau} - 2\bar{\beta} - 2\bar{\pi}))\Phi_{12} + (\delta - \eta_{12}(\tau - 2\beta - 2\bar{\pi}))\Phi_{21} \\ &- (D + \eta_{12}(\rho + \bar{\rho} - 2(\epsilon + \bar{\epsilon})))\Phi_{22} - \Delta(\Phi_{11} + 2\eta_{12}(\mu + \bar{\mu})\Phi_{11} + 3\Lambda) \\ &+ \eta_{12}(\nu\Phi_{01} + \bar{\nu}\Phi_{10} - \lambda\Phi_{02} - \bar{\lambda}\Phi_{20}) = 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} &(D - \eta_{12}(2\rho + \bar{\rho} - 2\bar{\epsilon}))\Phi_{12} + (\Delta + \eta_{12}(\mu + 2\bar{\mu} - 2\gamma))\Phi_{01} \\ &- (\bar{\delta} - \eta_{12}(\bar{\tau} - \pi + 2\alpha - 2\bar{\beta}))\Phi_{02} + \eta_{12}(\kappa\Phi_{22} - \bar{\nu}\Phi_{00} - \sigma\Phi_{21} + \bar{\lambda}\Phi_{10}) \\ &- \delta(\Phi_{11} + 2\eta_{12}(\bar{\pi} - \tau)\Phi_{11} - 3\Lambda) = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

## 2.2. Ecuación de la radiación gravitacional

En esta sección, obtendremos la ecuación general de Teukolsky con fuentes ecuación resultantes de la sección anterior. Si operamos  $\Psi_4^{(1)}$ , usando  $(\bar{\delta} + \eta_{12}(\bar{\beta} + 3\alpha + 4\pi - \bar{\tau}))$  y  $(\Delta + \eta_{12}(3\gamma - \bar{\gamma} + 4\mu + \bar{\mu}))$  en (2.4) y (2.5) respectivamente, obtenemos la ecuación de Teukolsky con fuentes para  $\Psi_4^{(1)}$  usando la relación (2.10). Además, necesitamos eliminar la componente  $\Psi_3^{(1)}$ , usando la relación de conmutación

$$[\delta, \Delta] = \delta\Delta - \Delta\delta = -\bar{\nu}D + (\tau - \bar{\alpha} - \beta)\Delta + (\mu - \gamma + \bar{\gamma})\delta + \bar{\lambda}\bar{\delta}, \quad (2.15)$$

y de las relaciones de Riemann  $R_{2421}$ ,  $R_{2443}$  y  $\frac{1}{2}(R_{1242} - R_{3442})$ , obtenemos la siguiente relación

$$\begin{aligned} & [(\Delta + \eta_{12}(3\gamma - \bar{\gamma} + 4\mu + \bar{\mu}))(\bar{\delta} + 2\eta_{12}(2\pi + \alpha)) \\ & - (\bar{\delta} + \eta_{12}(\bar{\beta} + 3\alpha + 4\pi - \bar{\tau}))(\Delta + 2\eta_{12}(2\mu + \gamma))] \varphi = \\ & - [4(\delta + \eta_{12}(-\bar{\alpha} + \bar{\pi} + \frac{5}{2}\beta + \frac{1}{2}\tau))\lambda - 4(D + \eta_{12}(\frac{7}{2}\epsilon + \bar{\epsilon} + \frac{3}{2}\rho - \bar{\rho}))\nu + 10\Psi_3] \varphi, \end{aligned} \quad (2.16)$$

para eliminar  $\Psi_3^{(1)}$  componente Perturbado.

Finalmente, obtenemos

$$\begin{aligned} & [(\Delta + \eta_{12}(3\gamma - \bar{\gamma} + 4\mu + \bar{\mu})) (D - \eta_{12}(\rho - 4\epsilon)) \\ & - (\bar{\delta} + \eta_{12}(\bar{\beta} + 3\alpha + 4\pi - \bar{\tau})) (\delta + \eta_{12}(4\beta - \tau)) - 3\eta_{12}\Psi_2] \Psi_4^{(1)} \\ & = T_4 + T_{4a}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde  $T_4$  y  $T_{4a}$  son los términos fuentes. La ecuación (2.16) está linealizada en el sentido que los escalares de Weyl  $\Psi_0$ ,  $\Psi_1$ ,  $\Psi_3$ ,  $\Psi_4$  y sus coeficientes spin  $\kappa$ ,  $\sigma$ ,  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $\nu$ ,  $\epsilon$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $\tau$ ,  $\pi$  como perturbaciones, son tomados de primer orden solamente. Deberíamos llegar a ecuaciones que involucren  $\Psi_4$  ya que ella es una medida invariante en la teoría de perturbación lineal. Este componente es el más significativo en radiación gravitacional la cual representa ondas salientes [16].

La ecuación (2.17) puede ser representada por una ecuación tipo onda [27]-[30]

$${}_s \square {}_s \psi = {}_s \mathcal{T}, \quad (2.18)$$

donde  $s$  representa el coeficiente spin el cual puede ser  $s = 0, 1, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$  para campos escalares, electromagnéticos, gravitacionales, de neutrino y de Weyl  ${}_2 \psi = \Psi_0^{(1)}$  y  ${}_{-2} \psi = \rho_s^{-4} \Psi_4^{(1)}$  representa ondas gravitacionales entrantes y salientes respectivamente.

Usando la expresión de Ricci en términos de las proyecciones de las fuentes, el término  $T_4$  está compuesto de operadores actuando sobre las proyecciones del tensor energía-momento  $T_{\mu\nu}$  que desencadena la respuesta gravitacional a lo largo de la tetrada,

$$T_4 = \hat{\mathcal{T}}^{nn} T_{nn}^{(1)} + \hat{\mathcal{T}}^{n\bar{m}} T_{n\bar{m}}^{(1)} + \hat{\mathcal{T}}^{\bar{m}\bar{m}} T_{\bar{m}\bar{m}}^{(1)} + \hat{\mathcal{T}}^{ln} T_{ln}^{(1)} + \hat{\mathcal{T}}^{l\bar{m}} T_{l\bar{m}}^{(1)} + \hat{\mathcal{T}}^{nm} T_{nm}^{(1)} + \hat{\mathcal{T}}^{m\bar{m}} T_{m\bar{m}}^{(1)} \quad (2.19)$$

Los operadores  $\hat{\mathcal{T}}^{ab}$  tienen la forma explícita

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{T}}^{nn} &= \eta_{12} \frac{K}{2} [(\bar{\delta} + \eta_{12}(\bar{\beta} + 3\alpha + 4\pi - \bar{\tau}))(\bar{\delta} + \eta_{12}(-\bar{\tau} + 2\alpha + 2\bar{\beta})) \\
&\quad - (\Delta + \eta_{12}(3\gamma - \bar{\gamma} + 4\mu + \bar{\mu}))\bar{\sigma}], \\
\hat{\mathcal{T}}^{n\bar{m}} &= \eta_{12} \frac{K}{2} [(\bar{\delta} + \eta_{12}(\bar{\beta} + 3\alpha + 4\pi - \bar{\tau}))(\Delta + 2\eta_{12}(\bar{\mu} + \gamma)) \\
&\quad + (\Delta + \eta_{12}(3\gamma - \bar{\gamma} + 4\mu + \bar{\mu}))(\bar{\delta} + 2\eta_{12}(\alpha - \bar{\tau}))], \\
\hat{\mathcal{T}}^{\bar{m}\bar{m}} &= \eta_{12} \frac{K}{2} [(\Delta + \eta_{12}(3\gamma - \bar{\gamma} + 4\mu + \bar{\mu}))(\Delta + \eta_{12}(\bar{\mu} + 2\gamma - 2\bar{\gamma})) \\
&\quad + (\bar{\delta} + \eta_{12}(\bar{\beta} + 3\alpha + 4\pi - \bar{\tau}))\bar{\nu}], \\
\hat{\mathcal{T}}^{ln} &= \hat{\mathcal{T}}^{m\bar{m}} = \frac{K}{2} [(\Delta + \eta_{12}(3\gamma - \bar{\gamma} + 4\mu + \bar{\mu}))\lambda - (\bar{\delta} + \eta_{12}(\bar{\beta} + 3\alpha + 4\pi - \bar{\tau}))\nu], \\
\hat{\mathcal{T}}^{l\bar{m}} &= K[(\Delta + \eta_{12}(3\gamma - \bar{\gamma} + 4\mu + \bar{\mu}))\nu], \\
\hat{\mathcal{T}}^{nm} &= K[(\bar{\delta} + \eta_{12}(\bar{\beta} + 3\alpha + 4\pi - \bar{\tau}))\lambda], \tag{2.20}
\end{aligned}$$

donde  $T_{nn}^{(1)} = T_{\mu\nu}^{(1)} n^\mu n^\nu$ ,  $T_{n\bar{m}}^{(1)} = T_{\mu\nu}^{(1)} n^\mu \bar{m}^\nu$ ,  $T_{\bar{m}\bar{m}}^{(1)} = T_{\mu\nu}^{(1)} \bar{m}^\mu \bar{m}^\nu$ ,  $T_{ln}^{(1)} = T_{\mu\nu}^{(1)} l^\mu n^\nu$ ,  $T_{l\bar{m}}^{(1)} = T_{\mu\nu}^{(1)} l^\mu \bar{m}^\nu$ ,  $T_{n\bar{m}}^{(1)} = T_{\mu\nu}^{(1)} n^\mu \bar{m}^\nu$ ,  $T_{m\bar{m}}^{(1)} = T_{\mu\nu}^{(1)} m^\mu \bar{m}^\nu$  donde  $T_{\mu\nu}^{(1)}$  puede ser un campo escalar, gravitacional, electromagnético y de neutrino como perturbación.

Retomando los términos fuentes de la ecuación (2.17) estos están definidos de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
T_4 &= \eta_{12} \frac{K}{2} \{[(\bar{\delta} + \eta_{12}(\bar{\beta} + 3\alpha + 4\pi - \bar{\tau}))(\Delta + 2\eta_{12}(\bar{\mu} + \gamma)) \\
&\quad + (\Delta + \eta_{12}(3\gamma - \bar{\gamma} + 4\mu + \bar{\mu}))(\bar{\delta} + 2\eta_{12}(\alpha - \bar{\tau}))]T_{n\bar{m}}^{(1)} \\
&\quad - [(\bar{\delta} + \eta_{12}(\bar{\beta} + 3\alpha + 4\pi - \bar{\tau}))(\bar{\delta} + \eta_{12}(-\bar{\tau} + 2\alpha + 2\bar{\beta})) - (\Delta + \eta_{12}(3\gamma - \bar{\gamma} + 4\mu + \bar{\mu}))\bar{\sigma}]T_{nn}^{(1)} \\
&\quad - [(\Delta + \eta_{12}(3\gamma - \bar{\gamma} + 4\mu + \bar{\mu}))(\Delta + \eta_{12}(\bar{\mu} + 2\gamma - 2\bar{\gamma})) + (\bar{\delta} + \eta_{12}(\bar{\beta} + 3\alpha + 4\pi - \bar{\tau}))\bar{\nu}]T_{\bar{m}\bar{m}}^{(1)} \\
&\quad - \eta_{12}[(\Delta + \eta_{12}(3\gamma - \bar{\gamma} + 4\mu + \bar{\mu}))\lambda - (\bar{\delta} + \eta_{12}(\bar{\beta} + 3\alpha + 4\pi - \bar{\tau}))\nu](T_{ln}^{(1)} + T_{m\bar{m}}^{(1)}) \\
&\quad + 2\eta_{12}[(\Delta + \eta_{12}(3\gamma - \bar{\gamma} + 4\mu + \bar{\mu}))\nu]T_{l\bar{m}}^{(1)} + [(\bar{\delta} + \eta_{12}(\bar{\beta} + 3\alpha + 4\pi - \bar{\tau}))\lambda]T_{nm}^{(1)}\}, \tag{2.21}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
T_{4a} &= 2\eta_{12}(\lambda + \nu)\Psi_1 \\
&- 3\eta_{12}[\Delta + \eta_{12}(\mu + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma})^{(1)}(\lambda\Psi_2) - (\bar{\delta} + \eta_{12}(3\alpha + \bar{\beta} + \pi + \bar{\tau}))^{(1)}(\nu\Psi_2)] \\
&- [\hat{T}_1(\delta + \eta_{12}(4\pi + 2\alpha))^{(1)} - \hat{T}_2(\Delta + \eta_{12}(2\gamma + 4\mu))^{(1)} - 3\eta_{12}\hat{T}_3 + 3\eta_{12}\hat{T}_4]\Psi_3 \\
&+ [\hat{T}_1(D + \eta_{12}(4\epsilon - \rho))^{(1)} - \hat{T}_2(\delta + \eta_{12}(4\beta - \tau))^{(1)} + 3(\kappa - \sigma)]\Psi_4 \\
&- 3\eta_{12}[\hat{T}_1\lambda - \hat{T}_2\nu]\Psi_2^{(1)} - 4\eta_{12}[\hat{T}_5\lambda - \hat{T}_6\nu + 10\Psi_3]\Psi_3^{(1)} \\
&- \eta_{12}\hat{T}_2[\eta_{12}\bar{\nu}^{(1)}\Phi_{20} + (\bar{\delta} + \eta_{12}(-\bar{\tau} + 2\alpha + 2\bar{\beta}))^{(1)}\Phi_{22} - (\Delta + 2\eta_{12}(\bar{\mu} + \gamma))^{(1)}\Phi_{21}] \\
&+ \eta_{12}\hat{T}_1[\eta_{12}\bar{\sigma}^{(1)}\Phi_{22} + (\bar{\delta} + 2\eta_{12}(\alpha - \bar{\tau}))^{(1)}\Phi_{21} - (\Delta + \eta_{12}(\bar{\mu} + 2\gamma - 2\bar{\gamma}))^{(1)}\Phi_{20}] \\
&+ 3\nu^{(1)}\{-\hat{T}_7\Phi_{21} + \hat{T}_8\Phi_{20} - \eta_{12}\bar{\kappa}\Phi_{22} - 2\eta_{12}\mu\Phi_{10} + 2\bar{\delta}\Lambda + \eta_{12}2\pi\Phi_{11} + \frac{2}{3}\hat{T}_1\Phi_{10} - \frac{2}{3}\hat{T}_2\Phi_{11}\} \\
&- 3\lambda^{(1)}\{-\hat{T}_9\Phi_{22} + \hat{T}_{10}\Phi_{21} - \eta_{12}\bar{\lambda}\Phi_{20} + 2\eta_{12}\pi\Phi_{12} + 2\Delta\Lambda - \eta_{12}2\mu\Phi_{11} - \frac{2}{3}\hat{T}_1\Phi_{12} - \frac{2}{3}\hat{T}_2\Phi_{11}\} \\
&+ 2\{[-\bar{\delta}\nu^{(1)} + \Delta\lambda^{(1)}]\Phi_{11} + (\Delta\nu^{(1)})\Phi_{10} + (\bar{\delta}\lambda^{(1)})\Phi_{12}\}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

donde

$$\begin{aligned}
\hat{T}_1 &= [\Delta + \eta_{12}(3\gamma - \bar{\gamma} + 4\mu + \bar{\mu})], \\
\hat{T}_2 &= [\bar{\delta} + \eta_{12}(\bar{\beta} + 3\alpha + 4\pi - \bar{\tau})], \\
\hat{T}_3 &= [D + 2\eta_{12}(\epsilon - \rho)], \\
\hat{T}_4 &= [\delta + 2\eta_{12}(\beta - \tau)], \\
\hat{T}_5 &= [\delta + \eta_{12}(-\alpha + \bar{\pi} + \frac{5}{2}\beta + \frac{1}{2}\tau)], \\
\hat{T}_6 &= [D + \eta_{12}(\bar{\epsilon} + \frac{5}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\rho - \bar{\rho})], \\
\hat{T}_7 &= [D - 2\eta_{12}(\bar{\rho} - \epsilon)], \\
\hat{T}_8 &= [\delta + \eta_{12}(\bar{\pi} - 2(\bar{\alpha} - \beta))], \\
\hat{T}_9 &= [D - \eta_{12}(\bar{\rho} - 2(\epsilon - \bar{\epsilon}))], \\
\hat{T}_{10} &= [\delta + 2\eta_{12}(\bar{\pi} + \beta)],
\end{aligned}$$

además, sabemos que (2.21) y (2.22) representan los términos fuente cuando los operadores diferenciales perturbados, los coeficientes spin perturbados y los componentes de Ricci de fondo no se cancelan.

### 2.3. Ecuación de la radiación electromagnética

Muchos problemas reales que involucran interacciones cerca de hoyos negros sin carga, pueden ser tratados en la aproximación del campo de prueba”. Debido a que la amplitud de energía-momento es de segundo orden en el campo electromagnético, la carga en la geometría de fondo causada es también de segundo orden. Así en las ecuaciones de Maxwell esta carga en la geometría puede ser olvidada a primer orden. Aquí trataremos el procedimiento abordado por Teukolsky en [17]. La derivación en esta sección aplica a cualquier métrica vacía Tipo D. Elegimos los vectores  $l$  y  $n$  de la tétrada no perturbada a lo largo de las direcciones principales nulas repetidas del tensor de Weyl. Entonces

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0, \\ \kappa &= \sigma = \nu = \lambda = 0.\end{aligned}\tag{2.23}$$

Cuando las expresiones (2.23) son satisfechas las ecuaciones de Maxwell son:

$$(D - 2\rho)\phi_1 - (\bar{\delta} + \pi - 2\alpha)\phi_0 = 2\pi J_l,\tag{2.24}$$

$$(\delta - 2\tau)\phi_1 - (\Delta + \mu - 2\gamma)\phi_0 = 2\pi J_m,\tag{2.25}$$

$$(D - \rho + 2\epsilon)\phi_2 - (\bar{\delta} + 2\pi)\phi_1 = 2\pi J_{\bar{m}},\tag{2.26}$$

$$(\delta - \tau + 2\beta)\phi_2 - (\Delta + 2\mu)\phi_1 = 2\pi J_n,\tag{2.27}$$

donde los  $\phi$ 's son los campos de prueba de primer orden y  $J_l = J_\mu l^\mu$ , etc., siendo  $J_\mu$  la densidad 4-actual.

Operando (2.24) con  $(\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi})$  tendremos

$$\begin{aligned}(\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi})(D - 2\rho)\phi_1 - (\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi})(\bar{\delta} + \pi - 2\alpha)\phi_0 \\ = 2\pi(\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi})J_l,\end{aligned}\tag{2.28}$$

y operando sobre la ecuación (2.25) con  $(D - \epsilon - \bar{\epsilon} - 2\rho - \bar{\rho})$  tenemos

$$\begin{aligned}(D - \epsilon - \bar{\epsilon} - 2\rho - \bar{\rho})\phi_1 - (D - \epsilon - \bar{\epsilon} - 2\rho - \bar{\rho})(\Delta - \mu - 2\gamma)\phi_0 \\ = 2\pi(D - \epsilon - \bar{\epsilon} - 2\rho - \bar{\rho})J_m,\end{aligned}\tag{2.29}$$

y sustrayendo una ecuación de la otra. La identidad (2.11) de [17] con  $p = 0$  y  $q = -2$  demuestran que los términos en  $\phi_1$  desaparecen, dejando desacoplados los términos para  $\phi_0$ . Tendremos así

$$[(D - \epsilon - \bar{\epsilon} - 2\rho - \bar{\rho})(\Delta - \mu - 2\gamma) - (\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi})(\bar{\delta} + \pi - 2\alpha)]\phi_0 = 2\pi J_0,\tag{2.30}$$

donde

$$J_0 = 2\pi[(\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi})J_l - (D - \epsilon - \bar{\epsilon} - 2\rho - \bar{\rho})J_m].\tag{2.31}$$

Por intercambiar  $l$  y  $n$  por  $m$  y  $\bar{m}$ , ahora obtendremos la ecuación para  $\phi_2$  de una manera análoga. Aquí, operando (2.26) con  $(\Delta + \gamma - \bar{\gamma} + 2\mu + \bar{\mu})$  tendremos

$$\begin{aligned} & (\Delta + \gamma - \bar{\gamma} + 2\mu + \bar{\mu})(D - \rho + 2\epsilon)\phi_2 - (\Delta + \gamma - \bar{\gamma} + 2\mu + \bar{\mu})(\bar{\delta} - 2\pi)\phi_1 \\ & = 2\pi(\Delta + \gamma - \bar{\gamma} + 2\mu + \bar{\mu})J_{\bar{m}}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

y operando sobre la ecuación (2.27) con  $(\bar{\delta} + \alpha + \bar{\beta} + 2\pi - \bar{\tau})$ , tenemos

$$\begin{aligned} & (\bar{\delta} + \alpha + \bar{\beta} + 2\pi - \bar{\tau})(\delta - \tau + 2\beta)\phi_2 - (\bar{\delta} + \alpha + \bar{\beta} + 2\pi - \bar{\tau})(\Delta - 2\mu)\phi_1 \\ & = 2\pi(\bar{\delta} + \alpha + \bar{\beta} + 2\pi - \bar{\tau})J_n, \end{aligned} \quad (2.33)$$

y sustrayendo una ecuación de la otra. La identidad (2.11) de [17] con  $p = 0$  y  $q = -2$  demuestra que los términos en  $\phi_1$  desaparecen, dejando desacoplados los términos para  $\phi_2$ . Tendremos así

$$[(\Delta + \gamma - \bar{\gamma} + 2\mu + \bar{\mu})(D - \rho - 2\epsilon) - (\bar{\delta} + \alpha + \bar{\beta} + 2\pi - \bar{\tau})(\delta - \tau + 2\beta)]\phi_2 = 2\pi J_2, \quad (2.34)$$

donde

$$J_2 = 2\pi[(\Delta + \gamma - \bar{\gamma} + 2\mu + \bar{\mu})J_{\bar{m}} - (\bar{\delta} + \alpha + \bar{\beta} + 2\pi - \bar{\tau})J_n]. \quad (2.35)$$

Ahora tenemos las componentes básicas para analizar nuestro modelo físico.

## Capítulo 3

# Análisis comparativo de una señal gravitacional a partir de su compañera electromagnética

En el presente capítulo estudiaremos la generación de radiación electromagnética y gravitacional en las proximidades de un agujero negro de Schwarzschild perturbado. Las perturbaciones gravitacionales y el campo electromagnético son estudiados al resolver la ecuación general de Teukolsky con fuentes, la cual se considera localmente cargada, debido a materia que cae radialmente hacia el agujero. Los resultados muestran que, además de la onda gravitatoria generada cuando la materia cae hacia el agujero negro, existe una explosión de radiación electromagnética. Este campo electromagnético tiene un conjunto característico de frecuencias cuasinormales, y la radiación gravitacional tiene las frecuencias cuasinormales de un agujero negro de Schwarzschild. Este contexto nos permite hacer una comparación entre las señales gravitacionales y electromagnéticas que son generadas por una fuente común.

### 3.1. Fundamentos: Formalismo Newman-Penrose

En su trabajo [17] Teukolsky utilizó la formulación espinorial de Newman-Penrose [24],[25], para encontrar una ecuación que pudiera describir campos de neutrinos, electromagnéticos y escalares, así como perturbaciones gravitacionales en un fondo de Kerr. En este escenario Teukolsky logró escribir la ecuación general para todos estos campos y además estudió algunas de sus propiedades, temas relacionados con el contenido del Capítulo 2. Una de las principales ideas de tal formulación consiste en elegir una base nula de vectores, tal base permite definir operadores di-

reccionales, como proyecciones de derivadas parciales a lo largo de cada elemento en la base, y las derivadas covariantes de tales vectores nulos proyectadas sobre ellas mismas lo que se ha mencionado ya en el Capítulo 1. Podemos encontrar una completa información sobre este tema en [15] y [34].

La ecuación general de Teukolsky incluye las fuentes que desencadenan la respuesta de perturbación; incluso el caso sin fuentes es interesante en toda la teoría de perturbaciones. En realidad, el caso sin fuentes es el caso estudiado con mayor frecuencia, el tiempo que describen las últimas etapas de una colisión de un agujero negro binario, una vez que se ha formado un único agujero negro perturbado.

## 3.2. Señales gravitacionales

### 3.2.1. Perturbaciones gravitacionales

Las ecuaciones de Einstein en el formalismo Newman Penrose, en donde las cantidades fundamentales son coeficientes de curvatura en vez de coeficientes métricos, consisten en 5 ecuaciones para los escalares de Weyl  $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ , los cuales están definidos como se expresaron en (1.62). Los escalares de Weyl que reflejan las ondas entrantes y salientes son  $\Psi_0, \Psi_4$  respectivamente, y ellas son las ondas gravitacionales transversales. Debido a que nuestro interés es la radiación, entonces estaríamos interesados sólo en las ondas salientes y la cantidad en la que estaríamos interesados está expresada de la siguiente forma

$$\Psi_4 \equiv -C_{\mu\nu\lambda\tau} n^\mu \bar{m}^\nu n^\lambda \bar{m}^\tau, \quad (3.1)$$

donde  $C_{\mu\nu\lambda\tau}$  es el tensor de Weyl y  $k^\mu, m^\nu$  son los dos vectores nulos, el primero a lo largo del cono nulo, y apuntando hacia adentro, y el segundo acostado en el plano perpendicular al cono de luz. En este espacio como ya se menciona sólo nos interesa en el escalar  $\Psi_4$  que describe la radiación que mide un observador muy alejado de la fuente.

Estudiando perturbaciones de las ecuaciones de Einstein [17] Teukolsky obtuvo una ecuación desacoplada para la perturbación de  $\Psi_4$  en términos de los coeficientes spin válidos en cualquier métrica tipo D en la clasificación de Petrov, tal ecuación para la perturbación  $\Psi_4^{(1)}$  está dada por

$$\begin{aligned} & [(\Delta - 4\mu - \bar{\mu} - 3\gamma + \bar{\gamma})(\mathbf{D} + \rho - 4\epsilon) \\ & - (\bar{\delta} - (3\alpha + \bar{\beta} + 4\pi - \bar{\tau}))(\delta - 4\beta + \tau) + 3\Psi_2] \Psi_4^{(1)} = -4\pi T_4, \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde  $\Delta, \mathbf{D}$  y  $\delta$  son los operadores derivados proyectados a lo largo de las direcciones nulas de los componentes de las tétradas, y el elemento con barra su complejo conjugado, y  $\Psi_2 \equiv -C_{\mu\nu\lambda\tau} l^\mu m^\nu \bar{m}^\lambda n^\tau$  es el único componente no cero de la métrica de fondo, esta ecuación (3.2) está relacionada con

la ecuación (2.17) considerando  $\eta_{12} = -1$ . El término fuente es  $T_4$ , esta compuesto de operadores actuando sobre las proyecciones del tensor energía-momento perturbado  $T_{\mu\nu}$ , a lo largo de la tétrada:

$$T_4 = \hat{\mathcal{T}}^{kk} T_{kk} + \hat{\mathcal{T}}^{k\bar{m}} T_{k\bar{m}} + \hat{\mathcal{T}}^{\bar{m}\bar{m}} T_{\bar{m}\bar{m}}, \quad (3.3)$$

El operador  $\hat{\mathcal{T}}^{ab}$  tiene la forma explícita

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{T}}^{kk} &= (-\bar{\delta} + 3\alpha + \bar{\beta} + 4\pi - \bar{\tau}) (\bar{\delta} - (2\alpha + 2\bar{\beta} - \bar{\tau})), \\ \hat{\mathcal{T}}^{k\bar{m}} &= (\Delta - (4\mu + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma})) (\bar{\delta} - 2(\alpha - \bar{\tau})) + \\ &\quad (\bar{\delta} - (3\alpha + \bar{\beta} + 4\pi - \bar{\tau})) (\Delta - 2(\bar{\mu} + \gamma)), \\ \hat{\mathcal{T}}^{\bar{m}\bar{m}} &= -(\Delta - (4\mu + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma})) (\Delta - (\bar{\mu} + 2\gamma - 2\bar{\gamma})). \end{aligned} \quad (3.4)$$

y el tensor energía-momento perturbado es la prueba de considerar la materia para desencadenar la respuesta del campo gravitatorio,  $T^{(1)}_{\mu\nu}$ , proyectado sobre la tétrada.

La idea central en la teoría de perturbaciones es considerar que todos los escalares se sustituyen por  $\Psi_s \rightarrow \Psi_s + \varepsilon\psi^{(1)}$  donde  $\Psi_s$  son los escalares solución a las ecuaciones de Einstein,  $\psi^{(1)}$  es la cantidad que se quiere conocer y  $\varepsilon$  es una cantidad pequeña  $|\varepsilon \ll 1|$ . Escribiendo las ecuaciones de Einstein con las cantidades perturbadas, se encuentra que la ecuación que satisfacen las perturbaciones son ecuaciones tipo onda no homogéneas; con segundas derivadas con respecto al tiempo y segundas derivadas con respecto al espacio. La no-homogeneidad, viene dada por las fuentes de la perturbación que esta codificada en términos del tensor de energía momento de la materia  $T_{\mu\nu}$  y sus proyecciones a lo largo de la tétrada.

### 3.2.2. Perturbaciones gravitacionales en fondo de Schwarzschild

Escribimos ahora la ecuación de la perturbación gravitacional con un fondo dado por un agujero negro estático. Consideramos la métrica de Schwarzschild en coordenadas de Kerr-Schild, con el fin de evitar las singularidades geométricas y debido a que estas coordenadas son útiles para imponer condiciones de frontera. La métrica toma la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + \frac{4M}{r} dr dt + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (3.5)$$

y la tétrada sobre la que trabajaremos se define como

$$l^\mu = \left(\frac{1}{2} + \frac{M}{r}, \frac{1}{2} - \frac{M}{r}, 0, 0\right), \quad n^\mu = (1, -1, 0, 0), \quad m^\mu = \frac{1}{r\sqrt{2}}(0, 0, 1, i \csc \theta), \quad (3.6)$$

donde  $l^\mu$  y  $k^\mu$  son vectores nulos a lo largo del cono de luz, el primero directamente hacia afuera y el segundo hacia adentro;  $m^\mu$  es otro vector nulo, este sobre el plano perpendicular al cono de luz, también como sus complejos conjugados. Estos vectores están normalizados:  $l^\mu n_\mu = -m^\mu \bar{m}_\mu = -1$ .

Las derivadas direccionales son simples  $\mathbf{D} = l^\mu \partial_\mu$ ,  $\mathbf{\Delta} = n^\mu \partial_\mu$  y  $\delta = m^\mu \partial_\mu$ . Los coeficientes spín diferentes de cero para la métrica son:

$$\mu = \frac{1}{r}, \quad \rho = \frac{r-2M}{2r^2}, \quad \epsilon = -\frac{M}{2r^2}, \quad \alpha = \frac{\cot \theta}{2\sqrt{2}r}, \quad \beta = -\alpha, \quad (3.7)$$

y el único componente de Weyl que no se anula es  $\Psi_2 = \frac{M}{r^3}$ .

La sustitución de la derivada direccional y los coeficientes spín (3.7) en la ecuación (3.2) lleva a la ecuación diferencial

$$\left[ \square_{tr}^\Psi + \frac{1}{r^2} \square_{\theta\varphi} \right] r \Psi_4^{(1)} = 16\pi r T_4, \quad (3.8)$$

donde el operador radial-temporal es

$$\begin{aligned} \square_{tr}^\Psi &= - \left( 1 + \frac{2M}{r} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4M}{r} \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} + 2 \left( \frac{2}{r} + \frac{M}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \\ &+ 2 \left( \frac{2}{r} - \frac{M}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial r} + 2 \frac{M}{r^3}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

y la parte angular

$$\square_{\theta\varphi} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - 4i \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - 2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}. \quad (3.10)$$

Siguiendo [34], asumimos que  $\Psi_4^{(1)}$  puede ser escrita en términos de armónicos esféricos de peso de spín  $s = -2$

$$\Psi_4^{(1)} = \sum_{\ell m} \frac{R_{\ell,m}^G(t,r)}{r} Y_{-2}^{\ell,m}(\theta, \phi), \quad (3.11)$$

donde  $\ell = 0, 1, 2..$  y  $-m < \ell < m$ . Esto puede ser visto en [15] y [35], que  $Y_{-2}^{\ell,m}$  son eigenfunciones del operador angular (3.10)

$$\square_{\theta\varphi} Y_{-2}^{\ell,m} = -(\ell-1)(\ell+2) Y_{-2}^{\ell,m}. \quad (3.12)$$

Después reemplazando el operador angular en (3.8) por su eigenvalores, multiplicando por el complejo conjugado  $\bar{Y}_{-2}^{\ell,m}$  e integrando sobre la ecuación (3.8), nos lleva a una ecuación diferencial ordinaria de cada función radial

$$\begin{aligned} &- \left( 1 + \frac{2M}{r} \right) \frac{\partial^2 R_{\ell,m}^G}{\partial t^2} + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{\partial^2 R_{\ell,m}^G}{\partial r^2} + \frac{4M}{r} \frac{\partial^2 R_{\ell,m}^G}{\partial t \partial r} + 2 \left( \frac{2}{r} + \frac{M}{r^2} \right) \frac{\partial R_{\ell,m}^G}{\partial t} \\ &+ 2 \left( \frac{2}{r} - \frac{M}{r^2} \right) \frac{\partial R_{\ell,m}^G}{\partial r} + \left( 2 \frac{M}{r^3} - \frac{(\ell-1)(\ell+2)}{r^2} \right) R_{\ell,m}^G = 16\pi r T_{\ell,m}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde el término fuente es  $T_{\ell,m} = \int T_4 \bar{Y}_{-2}^{\ell,m} \sin \theta d\theta d\varphi$ .

Con el fin de obtener una solución numérica de esta ecuación de segundo orden, la transformamos en un sistema de primer orden siguiendo el proceso del problema de valor inicial en [36] que consiste en definir un conjunto de variables auxiliares de primer orden de la forma

$$\psi_\ell^G = \partial_r R_\ell^G, \quad \pi_\ell^G = \left( 1 + \frac{2M}{r} \right) \partial_t R_\ell^G - \frac{2M}{r} \psi_\ell^G, \quad (3.14)$$

para obtener el sistema de ecuaciones de primer orden

$$\partial_t R_\ell^G = \frac{1}{r+2M} (r \pi_\ell^G + 2M \psi_\ell^G) , \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \psi_\ell^G &= \partial_r \left( \frac{1}{r+2M} (r \pi_\ell^G + 2M \psi_\ell^G) \right) \\ &= \frac{1}{r+2M} (r \partial_r \pi_\ell^G + 2M \partial_r \psi_\ell^G) + \frac{2M}{(r+2M)^2} (\pi_\ell^G - \psi_\ell^G) , \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \pi_{\ell,m}^G &= \frac{1}{r+2M} (2M \partial_r \pi_{\ell,m}^G + r \partial_r \psi_{\ell,m}^G) \\ &\quad + \frac{2}{r(r+2M)^2} ((2r^2 + 5Mr + 4M^2) \pi_{\ell,m}^G + (r+4M)(2r+3M) \psi_{\ell,m}^G) \\ &\quad + \left( 2\frac{M}{r^3} - \frac{(\ell-1)(\ell+2)}{r^2} \right) R_{\ell,m}^G - 16\pi r T_{\ell,m} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Este sistema de ecuaciones es resuelto numéricamente para obtener  $\pi_\ell, \psi_\ell$  y  $R_\ell$ , como respuesta a  $T_{\ell,m}$ . Posteriormente mostraremos los resultados numéricos.

### 3.2.3. Fuente de la perturbación gravitacional

Se toma una colección de partículas cargadas que se comporten como polvo para ser la fuente de la perturbación. Por simplicidad cada una de las partículas tiene la misma masa  $m$  y la carga  $e$ . Asumimos también que las partículas no pueden ser creadas o destruidas.

Sea el número de densidad en el resto del marco a ser  $n$  (el número de partículas por unidad de volumen) entonces la densidad de la masa en reposo esta dada por  $\rho = mn$ . Asumimos que las partículas están cargadas y son de la misma especie, con una relación de carga-masa constante a lo largo del disco de acreción, así por la corriente eléctrica inducida por el movimiento de las partículas es

$$J_{el}^\mu = q\rho u^\mu , \quad (3.18)$$

donde  $q$  es la carga para el radio de masa  $e/m$  y  $u^\mu$  es la cuadrivelocidad de las partículas. El tensor energía-momento del sistema esta dado por

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu . \quad (3.19)$$

Asumimos que las partículas están cayendo radialmente, bajo esta condición las cuadrivelocidades están dadas por  $u^\mu = (u^0(t, r), u^1(t, r), 0, 0)$ . La conservación de la cuarta masa para datos actuales, las ecuaciones de continuidad se expresan por

$$J^\mu{}_{;\mu} = 0 , \quad (3.20)$$

$$T^{\nu\mu}{}_{;\mu} = 0 . \quad (3.21)$$

Por medio de las ecuaciones (3.20) y (3.21) implica en general las ecuaciones de Euler, en el caso de polvo ello simplemente se reduce al movimiento de las geodésicas  $u^\nu u^\mu_{;\nu} = 0$ . Estas ecuaciones de las geodésicas, por usar las simetrías del espacio tiempo y la normalización sobre la velocidad  $u^\mu u_\mu = -1$ , puede ser integrada una vez, así la cuadrivelocidad puede ser expresada en términos de las constantes del movimiento y la posición de la partícula. Para el movimiento radial que estamos considerando, obtenemos las siguientes expresiones para los componentes de la cuadrivelocidad

$$u^1 = \pm \sqrt{E^2 - 1 + 2\frac{M}{r}}, \quad u^0 = \frac{E r + 2 M u^1}{r - 2 M}, \quad (3.22)$$

lo cual determina los componentes de la velocidad de cada partícula del fluido en una dada posición y tiempo. En estas últimas ecuaciones  $E$  es una constante de movimiento relacionada a la energía de cada partícula, y tomamos el signo menos en la raíz cuadrada de  $u^1$  indicando que la partícula esta cayendo hacia adentro del hoyo negro. Subsecuentemente, el problema de hidrodinámica se reduce a la ecuación de continuidad (3.20) lo cual proporciona una ecuación de evolución para la densidad, esto es:

$$\partial_t(\sqrt{-g}\rho u^0) + \partial_r(\sqrt{-g}\rho u^1) = 0, \quad (3.23)$$

donde  $\sqrt{-g}$  es el determinante de la métrica cuadrídimensional.

Estudiemos ahora más a detalle los términos fuentes que aparecen en la ecuación de perturbación. Dentro de la forma simple de la cuadrivelocidad, sólo las proyecciones del tensor energía-momento a lo largo del cono de luz en las  $n$ -direcciones no se cancelará, esto es

$$T_{n\bar{m}} = T_{\bar{m}\bar{m}} = 0, \quad T_{nn} = (n^\mu u_\mu)^2 \rho = (u^0 + u^1)^2 \rho. \quad (3.24)$$

En este caso simplificado, los términos fuentes de la ecuación de perturbación (3.8) están dados por

$$T_4 = \hat{\mathcal{T}}^{nn} T_{nn} = -\frac{(u^0 + u^1)^2}{2r^2} \bar{\partial}_{-1} \bar{\partial}_0 \rho. \quad (3.25)$$

Esta simple expresión indica que la parte angular puede ser desacoplada en los términos fuente por descomposición de la densidad en términos de los armónicos esféricos usuales (con peso cero), esto es

$$\rho = \sum_{lm} \rho_{l,m}(t, r) Y_0^{l,m}(\theta, \phi), \quad (3.26)$$

la acción para los operadores  $\bar{\partial}$  está definida en [30] actuando sobre un armónico de spin cero disminuye el doble del spin de peso a  $-2$ ,

$$\bar{\partial}_{-1} \bar{\partial}_{-0} Y_0^{l,m} = -\sqrt{l(l+1)} \bar{\partial}_{-1} Y_{-1}^{l,m} = \sqrt{(l-1)l(l+1)(l+2)} Y_{-2}^{l,m}. \quad (3.27)$$

Recopilando estos resultados obtenemos que los términos fuente para el polvo como caso tiene la forma

$$T_4 = \hat{\mathcal{T}}^{nn} T_{nn} = -\frac{(u^0 + u^1)^2}{2r^2} \sum_{\ell, m} \rho_{\ell, m}(t, r) \sqrt{(\ell-1)\ell(\ell+1)(\ell+2)} Y_{-2}^{\ell, m}, \quad (3.28)$$

y consecuentemente, después de una integración sobre el ángulo sólido y tomando en cuenta la ortogonalidad del armónico esférico

$$T_{\ell,m} = -\frac{(u^0 + u^1)^2}{2r^2} \rho_{\ell,m}(t,r) \sqrt{(\ell-1)\ell(\ell+1)(\ell+2)}. \quad (3.29)$$

Cualquier distribución de materia inicial arbitraria puede ser expandida en términos de esféricos armónicos, aunque de acuerdo con (3.29) el modo monopolo no genera ninguna reacción gravitacional, los modos de dipolos no generan respuesta gravitacional, y sólo el modo cuadrupolar y superiores generan respuesta gravitacional.

Es posible transformar la ecuación (3.23) en un conjunto de ecuaciones para cada modo

$$\partial_t \rho_{\ell,m} + v^r \partial_r \rho_{\ell,m} + 2 \frac{E^2 - 1 + \frac{3M}{2r}}{r \left( E^2 - 1 + \frac{2M}{r} \right)} v^r \rho_{\ell,m} = 0, \quad (3.30)$$

donde la 3 velocidad es  $v^r = u^1/u^0$ . Notar que la configuración (3.26) no es necesariamente esféricamente simétrica.

### 3.2.4. Teorema de Peeling para ondas gravitacionales

Considerando el teorema de Peeling (1.91) para ondas gravitacionales, los comportamientos asintóticos para las componentes  $\Psi_0^{(1)}$  y  $\Psi_4^{(1)}$  están representados por

$$\begin{aligned} \Psi_4 &\sim \frac{e^{-i\sigma r}}{r}, & \Psi_0^{(1)} &\sim \frac{e^{-i\sigma r}}{r^5} && \text{ondas salientes,} \\ \Psi_0 &\sim \frac{e^{-i\sigma r}}{r}, & \Psi_4^{(1)} &\sim \frac{e^{-i\sigma r}}{r^5} && \text{ondas entrantes} \end{aligned} \quad (3.31)$$

si identificamos  $\Psi_4$  como una de las componentes de las ondas salientes de los campos, debido a que las ondas salientes decaen como  $\frac{1}{r}$ , entonces, las restantes componentes decaen más rápidamente. De manera análoga se identifica como componentes entrantes de los campos a  $\Psi_0$ .

## 3.3. Señal electromagnética

### 3.3.1. Ecuaciones de Maxwell

Retomando el campo electromagnético en el Formalismo de Newman-Penrose como se expresaban en (1.79) uno define tres cantidades complejas como proyecciones del tensor de Faraday  $F_{\mu\nu}$ :

$$\phi_0 \equiv F_{\mu\nu} l^\mu m^\nu, \quad \phi_1 \equiv \frac{1}{2} F_{\mu\nu} (l^\mu n^\nu + \bar{m}^\mu m^\nu), \quad \phi_2 \equiv F_{\mu\nu} \bar{m}^\mu n^\nu, \quad (3.32)$$

$l^\mu$  es el otro vector nulo a lo largo del cono de luz, este está apuntando hacia adentro y  $\bar{m}^\mu$  es el vector complejo en el plano ortogonal al cono de luz;  $\phi_0$  y  $\phi_2$  representan los componentes electromagnéticos entrantes y salientes del cono de luz. De este modo  $\phi_2$  es la compañera electromagnética de la

radiación gravitacional saliente. Es importante notar que en este caso el campo ya es considerado como una perturbación de fondo.

Proyectando las ecuaciones de Maxwell  $F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 4\pi J^\mu$  dentro de una tétrada nula se pueden obtener un conjunto de ecuaciones para los escalares  $\phi$ 's. Además, siguiendo el trabajo de Teukolsky [17] las ecuaciones para  $\phi_2$  pueden ser desacopladas, y finalmente de la misma forma como se realizó en la Sección 2.3 pueden ser llevadas a una ecuación para la componente saliente del campo electromagnético en un espacio tipo D:

$$\begin{aligned} & [(-\Delta + 2\mu + \bar{\mu} + \gamma - \bar{\gamma})(-\mathbf{D} - \rho + 2\epsilon) \\ & - (-\bar{\delta} + \alpha + \bar{\beta} + 2\pi - \bar{\tau})(-\delta + 2\beta - \tau)] \phi_2 = 4\pi J_2, \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde el término fuente  $J_2$  es expresado como un operador actuando en la proyección del vector actual a lo largo de la tétrada nula

$$J_2 = (-\Delta + 2\mu + \bar{\mu} + \gamma - \bar{\gamma}) J_{\bar{m}} - (-\bar{\delta} + \alpha + \bar{\beta} + 2\pi - \bar{\tau}) J_k. \quad (3.34)$$

Donde  $J_k, J_m$  son las proyecciones del vector actual  $J_\mu$ , sobre el respectivo vector nulo. En esta forma, tenemos dos ecuaciones describiendo las radiaciones salientes gravitacional (3.2) y electromagnética (3.33), para una fuente dada descrita por  $T^{(1)}{}_{\mu\nu}$  para perturbación gravitacional y por  $J^\mu$  para la respuesta electromagnética.

### 3.3.2. Ecuaciones de Maxwell en fondo de Schwarzschild

De forma similar, escribimos la ecuación de Maxwell con un fondo dado por un agujero negro estático. Consideramos la métrica de Schwarzschild en coordenadas de Kerr-Schild, con el fin de evitar las singularidades en el horizonte. Se partirá nuevamente de las ecuaciones (3.5), (3.6) y (3.7).

Sustituyendo las derivadas direccionales y los coeficientes spín (3.7) en la ecuación (3.3) para  $\phi_2$ , debido a que sólo estamos interesados en el comportamiento de las ondas salientes, tenemos

$$\left[ \square_{tr}^\phi + \frac{1}{r^2} \square_{\theta\varphi}^{-1} \right] r\phi_2 = -8\pi r J_2, \quad (3.35)$$

donde

$$\square_{tr}^\phi = - \left( 1 + \frac{2M}{r} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4M}{r} \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad (3.36)$$

$$\square_{\theta\varphi}^{-1} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - 2i \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{\sin^2 \theta}. \quad (3.37)$$

Como fue hecho para la perturbación gravitacional, expandimos  $\phi_2$  en armónicos esféricos pero para este caso usamos un spín de peso  $s = -1$ . La elección de pesos de spín no es arbitraria, de

hecho, esta dada por el spín del campo considerado en [25],[35].

$$\phi_2 = \sum_{\ell} \frac{R_{\ell,m}^E(t,r)}{r} Y_{-1}^{\ell,m}(\theta, \varphi). \quad (3.38)$$

Después de reemplazar esta expresión en (3.35) obtenemos una ecuación para cada modo

$$\begin{aligned} & - \left(1 + \frac{2M}{r}\right) \frac{\partial^2 R_{\ell,m}^E(t,r)}{\partial t^2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\partial^2 R_{\ell,m}^E(t,r)}{\partial r^2} + \frac{4M}{r} \frac{\partial^2 R_{\ell,m}^E(t,r)}{\partial t \partial r} \\ & + \frac{2}{r} \frac{\partial R_{\ell,m}^E(t,r)}{\partial t} + \frac{2}{r} \frac{\partial R_{\ell,m}^E(t,r)}{\partial r} - \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right) R_{\ell,m}^E(t,r) = -8\pi r J_{\ell,m}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

donde los términos fuente están expresados como  $J_{\ell,m} = \int J_2 \bar{Y}_{-1}^{\ell,m} \sin \theta d\theta d\varphi$ . Además, definimos nuevamente siguiendo [36] las correspondientes variables auxiliares de primer orden como

$$\psi_{\ell}^E = \partial_r R_{\ell}^E, \quad \pi_{\ell}^E = \left(1 + \frac{2M}{r}\right) \partial_t R_{\ell}^E - \frac{2M}{r} \psi_{\ell}^E, \quad (3.40)$$

Las ecuaciones para  $\partial_t R_{\ell}^E$  y  $\partial_t \psi_{\ell}^E$  son las mismas ecuaciones que para el caso gravitacional (3.15) y (3.16), y la ecuación para  $\pi_{\ell}^E$  es

$$\begin{aligned} \partial_t \pi_{\ell}^E &= \frac{1}{r+2M} (r \partial_r \psi_{\ell}^E + 2M \partial_r \pi_{\ell}^E) + \frac{4M^2}{r(r+2M)^2} (\pi_{\ell}^E - \psi_{\ell}^E) \\ &+ \frac{2}{r} \left[ \frac{1}{r+2M} (r \pi_{\ell}^E + 2M \psi_{\ell}^E) \right] + \frac{2}{r} \psi_{\ell}^E - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R_{\ell}^E + 8\pi r J_{\ell,m}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

En la siguiente sección describimos una fuente común para la respuesta gravitacional y electromagnética: la acreción de materia cargada.

### 3.3.3. Fuente de la perturbación electromagnética

En una forma similar que para el caso gravitacional, usamos las expresiones para la densidad y la cuadrivelocidad en el tensor energía momento, y calculamos las proyecciones necesarias sobre la tétrada. Nos enfocamos en la fuente para  $\phi_2$ . Dado que la velocidad actual, ecuación (3.18), y la expansión (3.26) es sólo una proyección que no se cancela a lo largo del vector  $k^{\mu}$

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{r\sqrt{2}} (\partial_{\theta} - i \csc \theta \partial_{\varphi}) J_k \\ &= \frac{q}{r\sqrt{2}} (u^0 + u^1) \sum_{\ell m} \rho_{\ell,m} \bar{\partial}_0 Y_0^{\ell,m}(\theta, \varphi) \\ &= -\frac{q}{r\sqrt{2}} (u^0 + u^1) \sqrt{\ell(\ell+1)} \sum_{\ell,m} \rho_{\ell,m} Y_{-1}^{\ell,m}(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde hemos usado el hecho del que el operador  $\bar{\partial}_s$ , disminuye al paso del spín de peso de los armónicos esféricos de la forma:

$$\bar{\partial}_s Y_s^{\ell,m} = -\sqrt{(l+s)(l-s+1)} Y_{s-1}^{\ell,m}. \quad (3.43)$$

Entonces, integramos sobre la esfera para obtener

$$J_{\ell,m} = -\frac{q}{r\sqrt{2}}(u^0 + u^1)\sqrt{\ell(\ell+1)}\rho_{\ell,m}. \quad (3.44)$$

Cualquier distribución de materia inicial arbitraria puede ser expandida en términos de armónicos esféricos, aunque de acuerdo con la ecuación (3.44) el modo monopolo no genera ninguna reacción electromagnética, los modos de dipolos tampoco generan una respuesta electromagnética, y los modos cuadripolares y mayores si generan respuesta electromagnética. Además, cada modo despierta sólo el correspondiente modo electromagnético y gravitacional con el mismo número armónico  $l$ . La descomposición (3.29) y (3.44) permiten nuestro estudio con código numérico unidimensional, para cualquier distribución radial de la materia que cae polvo cargado y su reacción gravitacional y electromagnética. Observamos también que hay una degeneración con respecto a los modos  $m$ . Esta degeneración viene del hecho de que el fondo es esféricamente simétrico y el movimiento del fluido esta restringido a ser radial.

### 3.3.4. Teorema de Peeling para ondas electromagnéticas

Ahora tomando en cuenta el teorema de Peeling para ondas electromagnéticas, los comportamientos asintóticos para las componentes  $\phi_0$  y  $\phi_2$  están representados por

$$\begin{aligned} \phi_2 &\sim \frac{e^{-i\sigma r}}{r}, & \phi_0 &\sim \frac{e^{-i\sigma r}}{r^3} && \text{ondas salientes,} \\ \phi_2 &\sim \frac{e^{-i\sigma r}}{r}, & \phi_0 &\sim \frac{e^{+i\sigma r}}{r^3} && \text{ondas entrantes} \end{aligned} \quad (3.45)$$

si identificamos  $\phi_2$  como las ondas salientes de los campos, debido a que las ondas salientes decaen como  $\frac{1}{r}$ , entonces, las restantes componentes decaen más rápidamente. De manera análoga se identifica como componentes entrantes de los campos a  $\phi_0$  que decae  $\frac{1}{r}$ .

## 3.4. Resultados numéricos

Resolvemos las ecuaciones para la perturbación gravitacional con fuentes más las ecuaciones para un campo electromagnético usando el Método de Líneas (MoL). La descripción detallada del código esta dada en [30]. Aquí sólo sintetizamos los aspectos importantes. El código numérico involucra variables de primer orden un Runge Kutta de tercer orden integrador con un plantilla espacial de cuarto orden en un dominio  $r \in [r_{min}, r_{max}]$ .

Dado que estamos usando coordenadas tipo Kerr-Schild  $r_{min}$  se encuentra en el interior del evento del horizonte. Tradicionalmente, elegimos  $r_{min} = 1,5M$  y  $r_{max} = 2000M$ . Como siempre, introducimos una pequeña disipación de sexto orden para lograr deshacerse de los modos de frecuencias altas. En los límites, impondremos ondas entrantes (como se da en los campos caraterísticos) a

cero.

En todas las simulaciones presentadas usamos el datos inicial y un paquete de Gaussianas en la densidad. Esto representa una cáscara no esférica de partículas que caen al agujero. Resolvemos la ecuación de la densidad de masa en reposo y checamos para la respuesta gravitacional y electromagnética. La forma de onda gravitacional y electromagnética es extraída en un flujo de radio fijo  $r = r_o$ .

Ahora analizaremos el comportamiento de la señal gravitacional y su compañera electromagnética cuando un grupo de partículas cae dentro del agujero negro. Hemos considerado una cáscara de materia la cual puede ser escrita como un modo armónico esférico:

$$\rho(t, r, \theta, \varphi) = \rho_{\ell, m}(t, r) Y_0^{\ell, m}(\theta, \varphi), \quad \ell \geq 1. \quad (3.46)$$

Tomaremos los modos  $\ell = 1, 2$  ya que estos modos producen la principal contribución a la radiación gravitatoria cuadrupolar y la radiación electromagnética dipolar que se espera que sean dominantes. Los modos con  $\ell > 2$  serán relevantes para mayores multipolos gravitacionales y electromagnéticos. Hemos usado un dato inicial con  $t = 0$  una perturbación Gaussiana para la distribución de polvo centrada en  $r_{cg}$ :

$$\rho_{\ell, m}(0, r) = \rho_0 e^{-(r-r_{cg})^2/2\sigma^2}, \quad (3.47)$$

con  $\rho_0 = 5 \times 10^{-3}$ ,  $r_{cg} = 100M$  y  $\sigma = 0,5M$ .

Por simplicidad, las funciones gravitacionales y electromagnéticas,  $R^G, R^E$ , se establecen en cero, así como sus derivadas temporales. Nuestros resultados indican que los efectos de esta elección en la forma de onda gravitacional y en la electromagnética, no tienen un efecto significativo. Finalmente, observamos que la frontera exterior se ajusta a lo siguiente, no se puede asegurar que ninguna radiación esta presente.

### 3.4.1. Forma de onda

Considerando el modo dipolar ( $\ell = 1$ ) y el cuadrupolar ( $\ell = 2$ ) dado que ellos se espera sean dominantes. Como una consecuencia de nuestros resultados, encontramos que la señal electromagnética es homogénea de grado uno, es decir,  $R^E(t, r_o; \lambda q) = \lambda R^E(t, r_o; q)$ . Por lo tanto, conociendo los múltipolos  $\phi_2$  para una carga dada otras funciones de onda pueden ser derivadas. En la siguiente subsección veremos que escalas son idénticas linealmente con la carga  $q$ .

En la Figura 3.1 mostramos las formas de ondas radiales que se obtiene en el radio de extracción  $r_o = 1000M$ . En el panel de la izquierda el componente dipolar  $\ell = 1$  y el cuadrupolar  $\ell = 2$  se muestra en el panel de la derecha. En el recuadro se presenta gráficamente el valor absoluto en escala logarítmica para mostrar las diferentes etapas de la señal. El estallido inicial debido a los datos iniciales, el anillo cuasinormal y la cola. En estas figuras las formas de onda han sido reescaladas

para mostrar la dependencia de  $R^E$  sobre  $q$ .

Si bien frecuencia baja se determina por el timbre cuasinormal, es interesante tener en cuenta

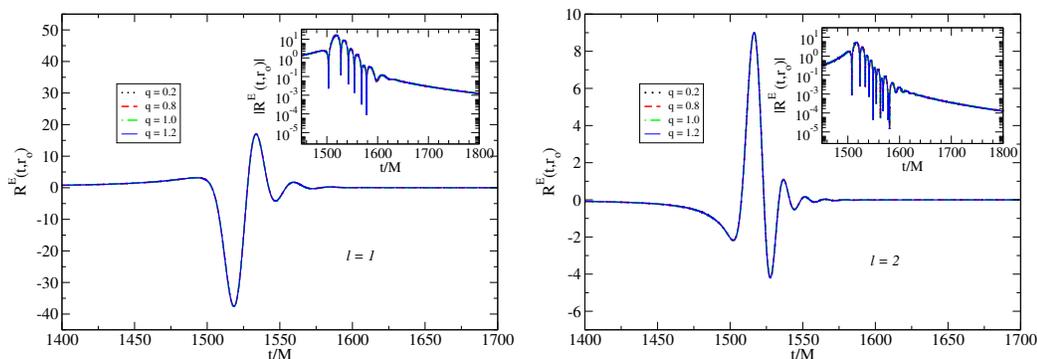


Figura 3.1: La señal Electromagnética para los modos  $\ell = 1$  y  $\ell = 2$ . Las formas de onda han sido reescaladas para mostrar la propiedad  $R^E(t, r_o; \lambda q) = \lambda R^E(t, r_o; q)$ .

que la amplitud puede ser derivada a partir de un reescalamiento. El comportamiento puede estar relacionado con otra escala o expansión observada en [13]. En el trabajo antes citado se considera que la colisión de dos hoyos negros cargados con carga opuesta  $Q$  y masa  $M$  tal que el hoyo negro resultante fue uno de tipo Schwarzschild. Se encontró que la forma de onda electromagnética emitida en escala de hoyos negros finales como  $Q(1 + Q^2/M^2)^{(1/2)}$ . Para un observador distante, sin embargo, la situación es que hay una señal electromagnética procedente de un hoyo negro casi estacionario muy similar a nuestro último conjunto cuando las partículas cargadas han caído en el hoyo.

Una comparación de las formas de onda electromagnética y gravitacional se muestra en la figura 3.2. La figura muestra los modos cuadrupolares para la señal gravitacional y el campo electromagnético para 2 casos representativos de la carga  $q = 0,2,0,8$ . No encontramos ninguna rastro de mezcla entre las frecuencias gravitacionales y electromagnéticas. Cada señal muestra su característica de frecuencia que decae. El recuadro muestra el valor absoluto en escala logarítmica. Hemos encontrado que las ondas electromagnéticas tienen una frecuencia específica que corresponde a la  $\ell = 1$  modo de cuasinormales de las ondas electromagnéticas en un fondo de Schwarzschild [37]-[39]. Las frecuencias de las ondas gravitacionales son por otro lado el modo cuasinormal cuadrupolar  $\ell = 2$  [22],[40],[41]. Los valores de las frecuencias correspondientes se muestran en el Cuadro 3.1 para los hoyos negros de algunas masa solares  $10M_{\odot} < M < 10^3M_{\odot}$  las frecuencias están entre 8Hz  $\sim$  800Hz, mientras las ondas gravitacionales son producidas en un rango de masa con la ventana de 12Hz a 1,2kHz. Como se ha señalado los cuasinormales pueden ser usados para determinar las propiedades intrínsecas de un hoyo negro [38]. Las ondas electromagnéticas como tales bajas fre-

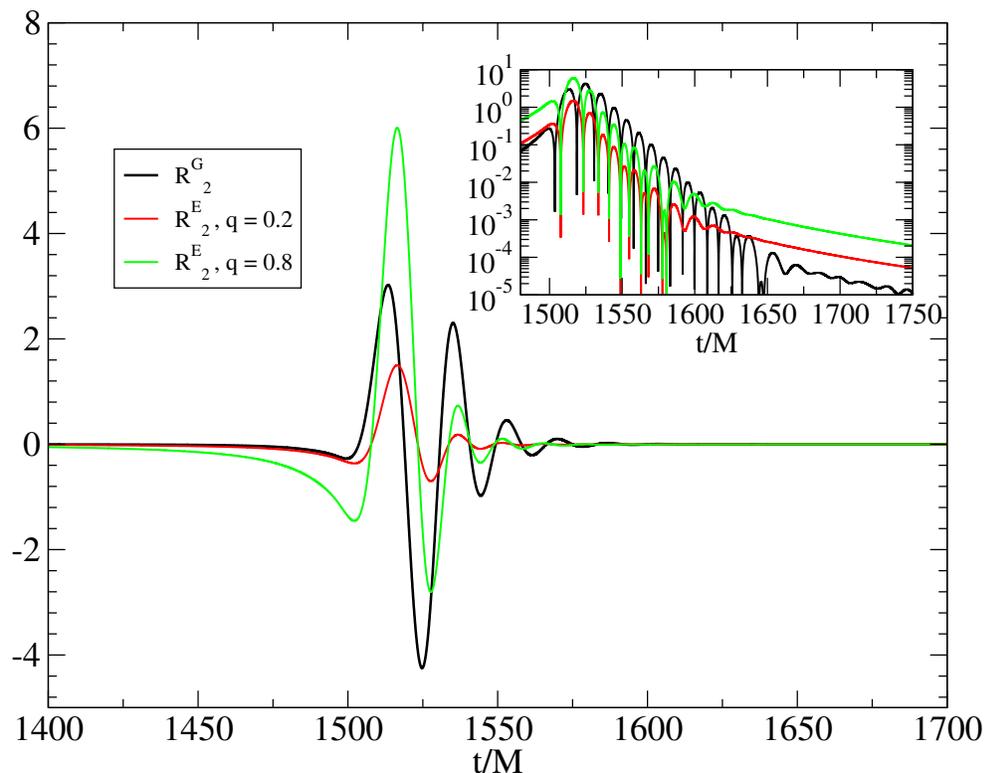


Figura 3.2: Perfiles radiales de la señal gravitacional ( $R_2^G$ ) y electromagnética ( $R_2^E$ ) para el modo cuadrupolar  $\ell = 2$ . El radio de extracción es  $r_o = 1000M$ . El panel del recuadro muestra el valor absoluto en una escala logarítmica para distinguir correctamente las diferentes fases.

cuencias en esta banda, sin embargo podrían ser absorbidas fácilmente por el medio interestelar durante su propagación y será casi imposible de detectar directamente. Una posible forma de observar las ondas electromagnéticas es la detección de su efecto indirecto en el medio, como la radiación del sincrotrón, en este escenario, sin embargo, se necesita más información sobre la fuente original. Estudiamos el efecto de la variación de la anchura media de Gauss en las señales gravitacionales y electromagnéticas. La respuesta de un hoyo negro aislado a la anchura de perturbaciones iniciales de Gauss es muy conocido. Cuando es muy amplia, ningún anillo cuasinormal se podría ver en la radiación dispersa. Cuando la Gaussiana se hacen delgada ningún anillo se presenta [42],[43]. Resultados similares fueron reportados cuando la perturbación fue causada por una distribución Gaussiana de polvo [34],[44],[46]. Nuestros resultados para las partículas de polvo cargadas en la misma dirección tanto para señales electromagnéticas que como para gravitacionales. No es muy común, pero es visto que aparecen Gaussianas muy amplias. La forma de onda electromagnética gravitacional para varios valores de la anchura Gaussiana inicial se representan gráficamente en la

$\ell$	$M\omega^{GW}$	$M\omega^{EM}$
1	-	0.2485
2	0.3733	0.457
3	0.5984	0.6556

Cuadro 3.1: Frecuencias cuasinormales gravitacionales y electromagnéticas

Figura 3.3.

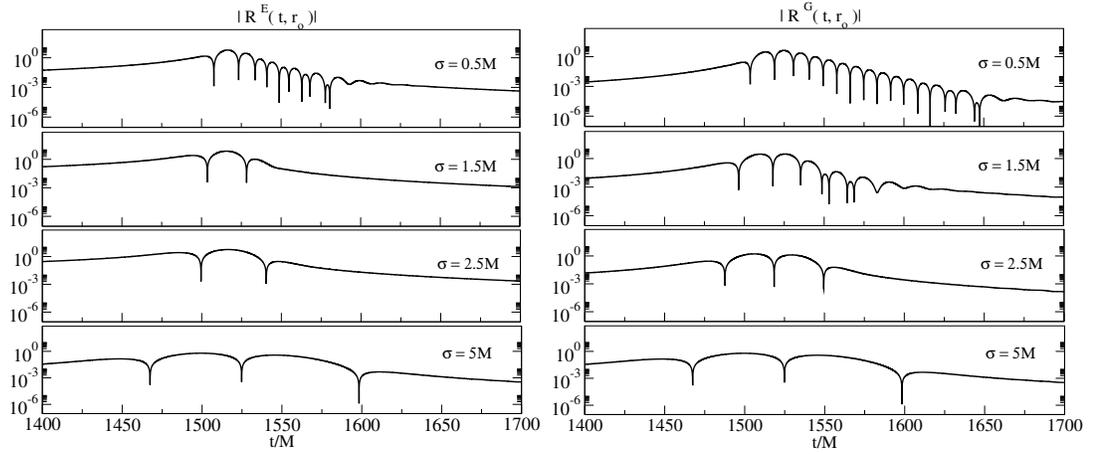


Figura 3.3: El valor absoluto de la forma de onda electromagnética (izquierda) y gravitacional (derecha) cuadrupolar  $\ell = 2$  para diferentes valores de la anchura Gaussiana  $\sigma$ . El observador está en  $r_o = 1000M$  y la Gaussiana fue ubicada en  $r_{cg} = 100M$ . La relación de masas de carga utilizada en estos ejemplos fue  $q = 0,8$ . Así  $\sigma$  incrementa la pérdida del comportamiento que decae esto se hace evidente para ambas señales.

### 3.4.2. Energía Radiada

En términos de la descomposición multipolar (3.11) el flujo de energía gravitacional radiado por unidad de tiempo está dado por [17]

$$P_{GW} = \frac{d}{dt} E_{GW} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi} \sum_{\ell, m} \left| \int_{-\infty}^t dt' R_{\ell}^G(t') \right|^2. \quad (3.48)$$

El flujo de energía por unidad de tiempo radiado por ondas electromagnéticas en términos de la descomposición multipolar (3.38) está dada por

$$P_{EM} = \frac{d}{dt} E_{EM} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell, m} |R_{\ell}^E(t)|^2. \quad (3.49)$$

Calculamos la energía total radiada por integración directa de las ecuaciones (3.48) y (3.49). Para calcular la energía total, empezamos integrando los flujos después de algún tiempo con el fin de deshacerse de la radiación resultante de los datos iniciales. La elección de la hora de inicio depende del radio de la extracción, tradicionalmente tomamos  $t_s \sim 1400M$  para un radio de extracción de  $r_o = 1000M$ . El valor de las energías no cambia cuando ponemos los observadores lejos del camino, que indica la validez de la región de aproximación.

Con el fin de mostrar el efecto de la carga de las partículas en ambas señales electromagnéticas y gravitacionales se considera el cociente entre las energías calculadas. En la figura 3.4 graficamos el cociente  $E^{EM}/E_{GW}$  contra la densidad de carga. Para valores pequeños la carga de la energía gravitacional domina, pero cuando la carga crece domina la energía electromagnética. Se encontró que existe una relación entre las dos energías. Ajustamos el cociente de las energías con una función cuadrática de la forma  $E_{EM}/E_{GW} = 12,417q^2$ .

En este capítulo se destaca lo relevante de poder de alguna forma detectar de la presencia de señales gravitacionales. Tomando como escenario un hoyo negro de Schwarzschild y haciendo uso de la ecuación general de Teukolsky se logra analizar perturbaciones gravitacionales y campo electromagnético en este fondo. Bajo estas condiciones se puede hacer un comparación de los dos tipos de señales y realizar un estudio en los diferentes modos polares de la presencia de cada señal.

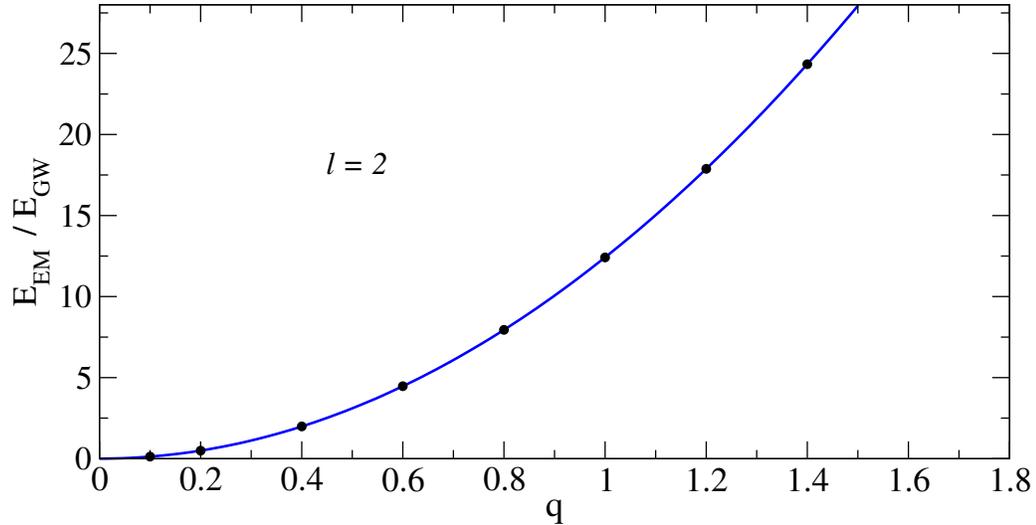


Figura 3.4: la razón de la energía radiada electromagnética y gravitacional calculada a partir de la integración de los flujos. La línea continua es una cuadrática fija  $E^{EM}/E_{GW} = 12,417q^2$ .

## Capítulo 4

# Conclusiones

A 100 años de que Einstein formulara la teoría de la Relatividad General, las ondas gravitacionales, una predicción de esta teoría, no han sido detectadas de manera experimental directa. En la búsqueda de las ondas gravitacionales los detectores por interferometría láser han sido calibrados hasta alcanzar las sensibilidades esperadas para su detección.

Una motivación en este trabajo ha sido la búsqueda de información de las ondas gravitacionales comparadas con su compañera electromagnética, un modelo formado por un hoyo negro rodeado de un disco de acreción formado por partículas cargadas. En esta tesis obtuvimos las ecuaciones linealizadas de la teoría de Einstein haciendo uso del formalismo de Newman-Penrose. Como primero objetivo encontramos la ecuación de onda gravitacional saliente para  $\Psi_4$ , la cual nos permitirá analizar las ondas gravitacionales de objetos astrofísicos con fuentes. Esta ecuación es bastante compleja ya que incluye coeficientes de espín perturbados, pero haciendo uso de manipulaciones algebraicas con la formulación de Newman Penrose, es posible eliminarlas cuando se toman los modelos métricos de hoyos negros, caso Schwarzschild con disco de acreción o Reissner-Nordstrom.

Analizamos los efectos de interacción entre las señales gravitacionales y electromagnéticas, haciendo uso de la ecuación de Teukolsky con fuentes para el caso de un hoyo negro de Schwarzschild, con partículas cargadas como disco de acreción y cayendo hacia el hoyo negro con movimiento geodésico. La ecuación obtenida fue posible resolverla al usar armónicos esféricos con peso de espín en la parte angular, y métodos numéricos para la parte radial temporal. Como resultado, obtuvimos que la materia que cae, en este caso las partículas cargadas, emiten dos señales una electromagnética y otra gravitacional. La señal gravitacional muestra el comportamiento característico de un agujero negro perturbado, una fase oscilante después de la explosión inicial y un decaimiento en la parte final de su propagación. Las ondas electromagnéticas muestran el mismo comportamiento cualita-

tivo. Sin embargo, no encontramos el acoplamiento directo entre las frecuencias de ambas señales.

Se estudió el efecto de la carga de las partículas en las señales emitidas y encontramos que existe una dependencia lineal de las formas de ondas electromagnéticas con relación de la carga de la masa de la partícula  $q$ . También se encontró que las energías gravitacionales y electromagnéticas están relacionadas con el cuadrado de  $q$ . Este significa que en un escenario ideal, si uno fuera capaz de medir la señal electromagnética se podrían determinar las propiedades de la onda gravitatoria, tales como la frecuencia y el contenido de energía, una vez que la carga se determina por otros medios astrofísicos. Con el fin de lograr este objetivo modelos más complicados de la materia deben ser tomados en cuenta. Se podrían señalar varias direcciones en las que el presente estudio podría continuar, una de ellas podría ser útil para ampliar el análisis el incluir modelos más realistas de discos de acreción o la inclusión de un modelo con un espacio-tiempo no vacío.

# Bibliografía

- [1] Hartle. J.; *An Introduction to Einstein's General Relativity*. (2003) Pearson Education.
- [2] Einstein, A., (1915). Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte, (part 1), 315. Einstein, A., (1915). Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte, (part 2), 778-786, 799-801. Einstein, A., (1920). *Relativity: The Special and the General Theory*. Reprint translation by Robert W. Lawson ed. Routledge. p. 48.
- [3] Misner C., Thome J. y Wheeler J.; *Gravitation* . (1973) W. H. Freeman and Company.
- [4] Hulse, R. A.; Taylor, J. H., (1975). Discovery of a pulsar in a binary system. *Astrophysical Journal*, vol. 195, Jan. 15, 1975, pt. 2, p. L51-L53.
- [5] CALTECH, y MIT (S. A.). LIGO: Laser Interferometer Gravitational - Wave Observatory. California Institute of Technology, y Massachusetts Institute of Technology. URL: <https://ligo.caltech.edu/> (10 de febrero de 2014)
- [6] CNRS, EGO, e INFN (S. A.). VIRGO. CNRS dépasser les frontières, European Gravitational Observatory, e Insituto Nacional di Fisica Nuclere. URL:<http://www.virgo.infn.it/> (10 de febrero de 2014)
- [7] IGR (2003). Geo600: Gravitational Wave Detector. Institute for Gravitational Research. URL: <http://www.geo600.org/> (10 de febrero de 2014).
- [8] NASA (2011). LISA: Laser Interferometer Space Antenna. National Aeronautics and Space Administration. URL: <http://lisa.nasa.gov/> (10 de febrero de 2014).
- [9] eLISA (2008). LISA Pathfinder Mission. eLisa. URL: <https://www.elisascience.org/> (10 de febrero de 2014).
- [10] Mroué A. H., et al.; *Catalog of 174 Binary Hole Simulations for Gravitational Wave Astronomy*, *Physical Review Letters*, **111**, 241104 (2013).

- [11] Mosta,P., Palenzuela,C., Rezzolla,L., Lehner,L., Yoshida,S., et al., *Vacuum Electromagnetic Counterparts of Binary Black-Hole Mergers* Phys.Rev. **D81**, 064017 (2010).
- [12] Alcubierre,M., Degollado,J. C. and Salgado,M.; *The Einstein-Maxwell system in 3+1 form and initial data for multiple charged black Holes*, Phys.Rev. **D80**, 104022 (2009).
- [13] Zilhao,M., Cardoso,V., Herdeiro,C., Lehner,L. and Sperhake,U.; *Collisions of oppositely charged Black Hole*, Phys.Rev. **D89**, 044008 (2014).
- [14] Shakura, N. and Sunyaev,R.; *Black Holes in Binary Systems: Observational Appearance*, Astron.Astrophys. **24**, 337 (1973).
- [15] Chandrasekhar,S., *The Mathematical Theory of Black Holes* (Oxford University Press, Oxford, England, 1983).
- [16] Teukolsky, S.A.,*Rotating black holes: Separable wave equations for gravitational and electromagnetic perturbations*; Phys. Rev. Lett. **29**, 1114 (1972).
- [17] Teukolsky, S.A.;*Perturbations of a rotating black hole. I. Fundamental equations for gravitational, electromagnetic and neutrino-field perturbations*,Astroph. J. **185**, 635-647 (1973).
- [18] Wald, R. M.; *General The Relativity*. The University Chicago Press. (1984)
- [19] Stewart, J.;*Advanced General Relativity*; Cambridge University Press (1991)
- [20] Weinberg, S;*Gravitation an Cosmology*; Ed. John Wiley & Sons Inc. (1972)
- [21] Langlois, D; arXiv: hep-th/0405053 (2004)
- [22] Chandrasekhar,S. and Detweiler,S.; Royal Society of London Proceedings Series A 344, 441 (1975).
- [23] Hawking S. W., Israel W. y Chandrasekhar S.; *General Relativity- An Einstein Century Survey* (Cambridge, England, **371** 1979).
- [24] ] Newman,E. T. and Penrose,R., J. Math. Phys. **3**, 566 (1962), erratum in J. Math. Phys. 4, 998 (1963).
- [25] Newman,E. T. and Penrose,R., J. Math. Phys. **7**, 863 (1966).
- [26] Petrov, A.Z.; *Sci. Nat. Kazan State University* **114**, 55 (1954)
- [27] Moreno,C. and Nuñez,D.; *Gravitational perturbations of Kerr black hole due to arbitrary sources*, Journal of Modern Phys.,**11**,1331 (2001)

- [28] Nuñez,D., Degollado,J.C. and Moreno C.; *Gravitational waves from scalar field accretion*; Phys. rev. D.,84, 024043 (2011).
- [29] Nuñez,D., Degollado,J.C. and Palenzuela,C.; *One dimensional description of the gravitational perturbation in a Kerr background*; Phys. Rev. D.,81 ,064011 (2010).
- [30] Degollado,J. C., Nuñez,D. and Carlos Palenzuela; *Signatures of the sources in the gravitational waves of a perturbed Schwarzschild black hole*; Gen. Rel. Grav., 42, 1287 (2010).
- [31] Torres del Castillo, G. F.;*Perturbations of solutions of the Einstein equations with sources*;Classical Quantum Gravity 5, 649 (1988).
- [32] Torres del Castillo, G. F.;*Gravitational and electromagnetics perturbations of the Schwarzschild solution*, J. Math. Phys. **37**, 2684 (1996)
- [33] Penrose R. and Rindler, W.; *Spinors and Space-Time*; Cambridge University; Cambridge 1984,Vol. 1
- [34] Degollado,J. C. and Nuñez,D.; *Perturbation theory of black holes: Generation and properties of gravitational waves*, AIP Conf.Proc. **1473**, 3 (2011).
- [35] Goldberg,J., MacFarlane,A., Newman,E., Rohrlich,F. and Sudarshan,E.; J.Math.Phys. **8**, 2155 (1967).
- [36] Zenginoglo A., *A hiperboloidal study of tail decay rates for scalar and Yang-Mills fields*, Class. Quantum Grav. **25**, 175013 (2018).
- [37] Cunningham,C.T., Price,R. H. and Moncrief,V., Astrophys. J. **224**, 643 (1978).
- [38] Berti,E., Cardoso,V. and Starinets,A. O.; *Quasinormal modes of black holes and black branes* Class.Quant.Grav. **26**, 163001 (2009).
- [39] Konoplya,R. and Zhidenko,A.; *Quasinormal modes of black holes: from astrophysics to string theory* Rev.Mod.Phys. **83**, 793 (2011).
- [40] Price,R. H., Phys. Rev. D **5**, 2419 (1972).
- [41] Leaver,E., Proc.Roy.Soc.Lond. **A402**, 285 (1985).
- [42] Kokkotas,K. D. and Schmidt,B. G; *Quasi-Normal Modes of Stars and Black Holes*, Living Rev.Rel. **2**, **2** (1999).
- [43] Vishveshwara,C.; Nature 227, 936 (1970).

- 
- [44] Papadopoulos,P. and Font,J.A.; *Matter flows around black holes and gravitational radiation*, Phys.Rev. **D59**, 044014 (1999).
- [45] Sotani,H. and Saijo,M.; *Gravitational waves from a dust disk around a Schwarzschild black hole*, Phys.Rev. **D74**, 024001 (2006).
- [46] Nagar,A., Zanotti,O., Font,J.A. and Rezzolla,L.; *On the accretion-induced QNM excitation of a Schwarzschild black hole* Phys.Rev. **D75**, 044016 (2007).